特征值与特征向量

练习

1. 求矩阵 A 的特征多项式：

a) $\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} -5 & 0 & -2 \\ 5 & -2 & 3 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 2 & -4 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \\ -5 & -2 & -5 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & -5 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

2. 已知矩阵 A 的一个特征向量为 $\mathbf{v}$，求它所对应的特征值。其中 $A, \mathbf{v}$ 为

a) $v = \left(1,\, \frac{1}{3}\right)^T, A = \begin{pmatrix} 0 & 12 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$

b) $v = \left(1,\, -\frac{1}{4}\right)^T, A = \begin{pmatrix} 19 & 60 \\ -5 & -16 \end{pmatrix}$

c) $v = (1,\, 1,\, 0)^T, A = \begin{pmatrix} 9 & -9 & 0 \\ 6 & -6 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

d) $v = \left(1,\, 0,\, -\frac{1}{3}\right)^T, A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -15 \\ -15 & 20 & -45 \\ -5 & 5 & -10 \end{pmatrix}$

e) $v = \left(1,\, 0,\, \frac{1}{2}\right)^T, A = \begin{pmatrix} 19 & 72 & -36 \\ -6 & -23 & 12 \\ -2 & -8 & 5 \end{pmatrix}$

f) $v = \left(1,\, 0,\, \frac{1}{3}\right)^T, A = \begin{pmatrix} -44 & -48 & 144 \\ 24 & 28 & -72 \\ -6 & -6 & 22 \end{pmatrix}$

3. 已知矩阵 A 的一个特征值为 λ，求它所对应的特征向量。其中 λ, A 为

a) $\lambda = -1, A = \begin{pmatrix} -16 & 60 \\ -3 & 11 \end{pmatrix}$

b) $\lambda = -3, A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}$

c) $\lambda = 4, A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & -3 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

d) $\lambda = 4, A = \begin{pmatrix} 67 & 252 & -126 \\ -21 & -80 & 42 \\ -7 & -28 & 18 \end{pmatrix}$

e) $\lambda = 3, A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

f) $\lambda = -3, A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -6 \\ 1 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & -6 \end{pmatrix}$

4. 求矩阵的特征值与特征向量

a) $A = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ -13 & 9 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} -31 & 120 \\ -6 & 23 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$

d) $A = \begin{pmatrix} 9 & 16 \\ -8 & -15 \end{pmatrix}$

e) $A = \begin{pmatrix} 61 & -280 & 210 \\ 20 & -89 & 60 \\ 5 & -20 & 6 \end{pmatrix}$

f) $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -15 \\ -30 & -19 & 30 \\ -10 & -5 & 6 \end{pmatrix}$

g) $A = \begin{pmatrix} -6 & 4 & 16 \\ 6 & -8 & -24 \\ -2 & 2 & 6 \end{pmatrix}$

h) $A = \begin{pmatrix} -10 & -6 & -6 \\ 36 & 26 & 36 \\ -9 & -6 & -7 \end{pmatrix}$

i) $A = \begin{pmatrix} 17 & 8 & -2 \\ -14 & -2 & -4 \\ -7 & -4 & 4 \end{pmatrix}$

j) $A = \begin{pmatrix} -18 & -8 & 44 \\ 6 & -1 & -20 \\ -3 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

答案

1. a) r^2-4r-9
   b) r^2+r+10
   c) $r^3-2r^2+2r+38$
   d) $r^3+9r^2+20r+12$
   e) $r^3-2r^2-14r+81$
   f) $r^3-r^2-34r-33$

2. a) 4
   b) 4
   c) 3
   d) 0
   e) -1
   f) -2

3. a) $\left(1,\ \frac{1}{4}\right)^T$
   b) $\left(1,\ -\frac{1}{2}\right)^T$
   c) $v_1=(1,\ 0,\ -1)^T, v_2=(0,\ 1,\ 0)^T$
   d) $v_1=\left(1,\ 0,\ \frac{1}{2}\right)^T, v_2=(0,\ 1,\ 2)^T$
   e) $v_1=(1,\ 0,\ -1)^T, v_2=(0,\ 1,\ 0)^T$
   f) $v_1=\left(1,\ 0,\ \frac{1}{3}\right)^T, v_2=\left(0,\ 1,\ \frac{2}{3}\right)^T$

4. a) $\lambda_1=9, v_1=(0,\ 1)^T,\quad \lambda_2=-4, v_2=(1,\ 1)^T$
   b) $\lambda_1=-1, v_1=\left(1,\ \frac{1}{4}\right)^T,\quad \lambda_2=-7, v_2=\left(1,\ \frac{1}{5}\right)^T$
   c) $\lambda_1=8, v_1=(1,\ 0)^T,\quad \lambda_2=8, v_2=(0,\ 1)^T$
   d) $\lambda_1=1, v_1=\left(1,\ -\frac{1}{2}\right)^T,\quad \lambda_2=-7, v_2=(1,\ -1)^T$
   e) $\lambda_1=-4, v_1=\left(1,\ \frac{2}{7},\ \frac{1}{14}\right)^T, \lambda_2=-9, v_2=\left(1,\ 0,\ -\frac{1}{3}\right)^T, \lambda_3=-9, v_3=\left(0,\ 1,\ \frac{4}{3}\right)^T$
   f) $\lambda_1=1, v_1=(1,\ -3,\ -1)^T, \lambda_2=-4, v_2=(1,\ -4,\ -1)^T, \lambda_3=-9, v_3=\left(0,\ 1,\ \frac{1}{3}\right)^T$
   g) $\lambda_1=-4, v_1=\left(1,\ -\frac{3}{2},\ \frac{1}{2}\right)^T, \lambda_2=-2, v_2=\left(1,\ 0,\ \frac{1}{4}\right)^T, \lambda_3=-2, v_3=\left(0,\ 1,\ -\frac{1}{4}\right)^T$
   h) $\lambda_1=8, v_1=(1,\ -4,\ 1)^T, \lambda_2=2, v_2=(1,\ -3,\ 1)^T, \lambda_3=-1, v_3=\left(1,\ -2,\ \frac{1}{2}\right)^T$
   i) $\lambda_1=10, v_1=\left(1,\ -1,\ -\frac{1}{2}\right)^T, \lambda_2=6, v_2=\left(1,\ -\frac{3}{2},\ -\frac{1}{2}\right)^T, \lambda_3=3, v_3=(1,\ -2,\ -1)^T$
   j) $\lambda_1=-3, v_1=\left(1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{4}\right)^T, \lambda_2=-5, v_2=\left(1,\ -\frac{1}{4},\ \frac{1}{4}\right)^T, \lambda_3=-6, v_3=\left(1,\ -\frac{2}{5},\ \frac{1}{5}\right)^T$