特征值与特征向量

练习

1. 求矩阵 A 的特征多项式：

a) $\begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -5 & -4 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 \\ -5 & 4 & -2 \\ -2 & 5 & 5 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 5 & -5 & 0 \\ 2 & -5 & 0 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} -3 & -5 & -5 \\ 4 & -2 & -5 \\ 5 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 4 & 0 & -4 \\ -1 & -5 & -3 \\ -2 & -3 & -2 \end{pmatrix}$

2. 已知矩阵 A 的一个特征向量为 $\mathbf{v}$，求它所对应的特征值。其中 $A, \mathbf{v}$ 为

a) $v = \left(1,\, \frac{1}{4}\right)^T, A = \begin{pmatrix} -40 & 180 \\ -9 & 41 \end{pmatrix}$

b) $v = \left(1,\, \frac{1}{2}\right)^T, A = \begin{pmatrix} -13 & 36 \\ -6 & 17 \end{pmatrix}$

c) $v = \left(1,\, 0,\, -\frac{1}{4}\right)^T, A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -12 \\ 3 & 4 & 12 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

d) $v = \left(1,\, 0,\, \frac{1}{3}\right)^T, A = \begin{pmatrix} 25 & -30 & -90 \\ -10 & 5 & 30 \\ 10 & -10 & -35 \end{pmatrix}$

e) $v = \left(1,\, -\frac{1}{3},\, 0\right)^T, A = \begin{pmatrix} -9 & -42 & 0 \\ 4 & 17 & 0 \\ -2 & -6 & 5 \end{pmatrix}$

f) $v = (1,\, 0,\, -1)^T, A = \begin{pmatrix} 60 & 180 & 60 \\ -20 & -60 & -20 \\ -5 & -15 & -5 \end{pmatrix}$

3. 已知矩阵 A 的一个特征值为 λ，求它所对应的特征向量。其中 λ, A 为

a) $\lambda = 5, A = \begin{pmatrix} 25 & 60 \\ -10 & -25 \end{pmatrix}$

b) $\lambda = 2, A = \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$

c) $\lambda = 0, A = \begin{pmatrix} -24 & 48 & 72 \\ -4 & 8 & 12 \\ -4 & 8 & 12 \end{pmatrix}$

d) $\lambda = 0, A = \begin{pmatrix} 12 & 24 & 0 \\ -8 & -16 & 0 \\ -4 & -8 & 0 \end{pmatrix}$

e) $\lambda = -3, A = \begin{pmatrix} 3 & -18 & 24 \\ 4 & -15 & 16 \\ 2 & -6 & 5 \end{pmatrix}$

f) $\lambda = 4, A = \begin{pmatrix} 20 & 16 & 16 \\ -16 & -12 & -16 \\ -4 & -4 & 0 \end{pmatrix}$

4. 求矩阵的特征值与特征向量

a) $A = \begin{pmatrix} -29 & 38 \\ -19 & 28 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} -7 & 0 \\ -13 & 6 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} -12 & 42 \\ -7 & 23 \end{pmatrix}$

d) $A = \begin{pmatrix} -23 & 28 \\ -14 & 19 \end{pmatrix}$

e) $A = \begin{pmatrix} 27 & 20 & 52 \\ -6 & -1 & -14 \\ -6 & -5 & -10 \end{pmatrix}$

f) $A = \begin{pmatrix} 8 & 8 & -8 \\ -14 & -8 & 2 \\ -14 & -8 & 2 \end{pmatrix}$

g) $A = \begin{pmatrix} 29 & -136 & 0 \\ 8 & -37 & 0 \\ 2 & -8 & -5 \end{pmatrix}$

h) $A = \begin{pmatrix} 21 & 21 & 12 \\ -18 & -18 & -12 \\ -9 & -7 & -10 \end{pmatrix}$

i) $A = \begin{pmatrix} 44 & 12 & 138 \\ 51 & 18 & 177 \\ -17 & -4 & -53 \end{pmatrix}$

j) $A = \begin{pmatrix} 9 & 4 & 36 \\ 0 & -1 & 0 \\ -3 & -1 & -12 \end{pmatrix}$

答案

1.
a) r^2-2r+7
b) $r^2+7r+37$
c) $r^3-10r^2+62r-192$
d) $r^3+4r^2+7r-15$
e) $r^3+8r^2+76r+73$
f) $r^3+3r^2-35r-32$

2.
a) 5
b) 5
c) 5
d) 5
e) 3
f) -5

3.
a) $\left(1,\,-\frac{1}{3}\right)^T$
b) $\left(1,\,-\frac{1}{3}\right)^T$
c) $v_1=\left(1,\,0,\,\frac{1}{3}\right)^T, v_2=\left(0,\,1,\,-\frac{2}{3}\right)^T$
d) $v_1=\left(1,\,-\frac{1}{2},\,0\right)^T, v_2=(0,\,0,\,1)^T$
e) $v_1=\left(1,\,0,\,-\frac{1}{4}\right)^T, v_2=\left(0,\,1,\,\frac{3}{4}\right)^T$
f) $v_1=(1,\,0,\,-1)^T, v_2=(0,\,1,\,-1)^T$

4.
a) $\lambda_1=9, v_1=(1,\,1)^T,\quad \lambda_2=-10, v_2=\left(1,\,\frac{1}{2}\right)^T$
b) $\lambda_1=6, v_1=(0,\,1)^T,\quad \lambda_2=-7, v_2=(1,\,1)^T$
c) $\lambda_1=9, v_1=\left(1,\,\frac{1}{2}\right)^T,\quad \lambda_2=2, v_2=\left(1,\,\frac{1}{3}\right)^T$
d) $\lambda_1=5, v_1=(1,\,1)^T,\quad \lambda_2=-9, v_2=\left(1,\,\frac{1}{2}\right)^T$
e) $\lambda_1=9, v_1=\left(1,\,-\frac{1}{4},\,-\frac{1}{4}\right)^T, \lambda_2=4, v_2=\left(1,\,-\frac{1}{2},\,-\frac{1}{4}\right)^T, \lambda_3=3, v_3=\left(1,\,-\frac{1}{3},\,-\frac{1}{3}\right)^T$
f) $\lambda_1=8, v_1=(1,\,-1,\,-1)^T, \lambda_2=0, v_2=(1,\,-2,\,-1)^T, \lambda_3=-6, v_3=(0,\,1,\,1)^T$
g) $\lambda_1=-3, v_1=\left(1,\,\frac{4}{17},\,\frac{1}{17}\right)^T, \lambda_2=-5, v_2=\left(1,\,\frac{1}{4},\,0\right)^T, \lambda_3=-5, v_3=(0,\,0,\,1)^T$
h) $\lambda_1=3, v_1=\left(1,\,-\frac{2}{3},\,-\frac{1}{3}\right)^T, \lambda_2=-4, v_2=\left(1,\,-1,\,-\frac{1}{3}\right)^T, \lambda_3=-6, v_3=\left(1,\,-1,\,-\frac{1}{2}\right)^T$
i) $\lambda_1=10, v_1=\left(1,\,1,\,-\frac{1}{3}\right)^T, \lambda_2=6, v_2=\left(1,\,\frac{2}{3},\,-\frac{1}{3}\right)^T, \lambda_3=-7, v_3=\left(1,\,\frac{3}{2},\,-\frac{1}{2}\right)^T$
j) $\lambda_1=0, v_1=\left(1,\,0,\,-\frac{1}{4}\right)^T, \lambda_2=-1, v_2=\left(1,\,-\frac{1}{4},\,-\frac{1}{4}\right)^T, \lambda_3=-3, v_3=\left(1,\,0,\,-\frac{1}{3}\right)^T$