特征值与特征向量

练习

1. 求矩阵 A 的特征多项式:

a) $\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} -5 & -3 & -1 \\ -3 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 2 & -2 & 5 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 0 & 5 & 1 \\ 5 & -1 & 4 \\ -4 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \\ -4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$

2. 已知矩阵 A 的一个特征向量为 $\mathbf{v}$，求它所对应的特征值。其中 $A, \mathbf{v}$ 为

a) $v = \left(1,\, \frac{1}{3}\right)^T, A = \begin{pmatrix} -9 & 36 \\ -3 & 12 \end{pmatrix}$

b) $v = (1,\, 1)^T, A = \begin{pmatrix} -14 & 18 \\ -9 & 13 \end{pmatrix}$

c) $v = \left(1,\, 0,\, -\frac{1}{3}\right)^T, A = \begin{pmatrix} -26 & 56 & -84 \\ -21 & 44 & -63 \\ -7 & 14 & -19 \end{pmatrix}$

d) $v = \left(1,\, 0,\, -\frac{1}{3}\right)^T, A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -5 & -11 & -15 \\ 5 & 10 & 14 \end{pmatrix}$

e) $v = \left(1,\, 0,\, \frac{1}{4}\right)^T, A = \begin{pmatrix} -18 & -60 & 60 \\ 10 & 37 & -40 \\ 5 & 20 & -23 \end{pmatrix}$

f) $v = (1,\, 0,\, 1)^T, A = \begin{pmatrix} -19 & 72 & 18 \\ -3 & 11 & 3 \\ -3 & 12 & 2 \end{pmatrix}$

3. 已知矩阵 A 的一个特征值为 λ，求它所对应的特征向量。其中 λ, A 为

a) $\lambda=0, A=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$

b) $\lambda=5, A=\begin{pmatrix} 11 & 24 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$

c) $\lambda=3, A=\begin{pmatrix} 11 & -16 & -8 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix}$

d) $\lambda=0, A=\begin{pmatrix} -40 & -120 & -80 \\ 15 & 45 & 30 \\ -5 & -15 & -10 \end{pmatrix}$

e) $\lambda=-1, A=\begin{pmatrix} 35 & 72 & 0 \\ -16 & -33 & 0 \\ 4 & 8 & -1 \end{pmatrix}$

f) $\lambda=-1, A=\begin{pmatrix} -26 & 50 & 0 \\ -15 & 29 & 0 \\ 5 & -10 & -1 \end{pmatrix}$

4. 求矩阵的特征值与特征向量

a) $A=\begin{pmatrix} 29 & 84 \\ -7 & -20 \end{pmatrix}$

b) $A=\begin{pmatrix} -20 & 28 \\ -14 & 22 \end{pmatrix}$

c) $A=\begin{pmatrix} -5 & 4 \\ -2 & -11 \end{pmatrix}$

d) $A=\begin{pmatrix} -10 & 12 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$

e) $A=\begin{pmatrix} -40 & -27 & 90 \\ 24 & 17 & -54 \\ -12 & -9 & 26 \end{pmatrix}$

f) $A=\begin{pmatrix} -17 & -16 & 118 \\ -36 & -30 & 232 \\ -9 & -8 & 60 \end{pmatrix}$

g) $A=\begin{pmatrix} -39 & -32 & 180 \\ 0 & -2 & 0 \\ -9 & -8 & 42 \end{pmatrix}$

h) $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -8 & 0 & 12 \\ -4 & -2 & 10 \end{pmatrix}$

i) $A=\begin{pmatrix} -1 & -2 & 10 \\ 0 & 7 & 0 \\ -5 & -2 & 14 \end{pmatrix}$

j) $A=\begin{pmatrix} 27 & 6 & 42 \\ -30 & -1 & -66 \\ -10 & -2 & -17 \end{pmatrix}$

答案

1. a) r^2-r-22 b) r^2-2r-1
c) $r^3-31r+39$ d) $r^3-6r^2-12r+76$
e) $r^3-2r^2-36r+144$ f) $r^3-7r^2+2r-36$

2. a) 3 b) 4
c) -5 d) 4
e) 2 f) -4

3. a) $(1,\,-1)^T$ b) $\left(1,\,-\frac{1}{4}\right)^T$
c) $v_1=(1,\,0,\,1)^T, v_2=(0,\,1,\,-2)^T$ d) $v_1=\left(1,\,0,\,-\frac{1}{2}\right)^T, v_2=\left(0,\,1,\,-\frac{3}{2}\right)^T$
e) $v_1=\left(1,\,-\frac{1}{2},\,0\right)^T, v_2=(0,\,0,\,1)^T$ f) $v_1=\left(1,\,\frac{1}{2},\,0\right)^T, v_2=(0,\,0,\,1)^T$

4. a) $\lambda_1=8, v_1=\left(1,\,-\frac{1}{4}\right)^T, \quad \lambda_2=1, v_2=\left(1,\,-\frac{1}{3}\right)^T$
b) $\lambda_1=8, v_1=(1,\,1)^T, \quad \lambda_2=-6, v_2=\left(1,\,\frac{1}{2}\right)^T$
c) $\lambda_1=-7, v_1=\left(1,\,-\frac{1}{2}\right)^T, \quad \lambda_2=-9, v_2=(1,\,-1)^T$
d) $\lambda_1=-4, v_1=\left(1,\,\frac{1}{2}\right)^T, \quad \lambda_2=-6, v_2=\left(1,\,\frac{1}{3}\right)^T$
e) $\lambda_1=8, v_1=\left(1,\,-\frac{2}{3},\,\frac{1}{3}\right)^T, \lambda_2=-1, v_2=\left(1,\,-\frac{1}{3},\,\frac{1}{3}\right)^T, \lambda_3=-4, v_3=\left(1,\,-\frac{1}{2},\,\frac{1}{4}\right)^T$
f) $\lambda_1=10, v_1=\left(1,\,2,\,\frac{1}{2}\right)^T, \lambda_2=2, v_2=\left(1,\,\frac{5}{2},\,\frac{1}{2}\right)^T, \lambda_3=1, v_3=\left(1,\,\frac{4}{3},\,\frac{1}{3}\right)^T$
g) $\lambda_1=6, v_1=\left(1,\,0,\,\frac{1}{4}\right)^T, \lambda_2=-2, v_2=\left(1,\,\frac{1}{4},\,\frac{1}{4}\right)^T, \lambda_3=-3, v_3=\left(1,\,0,\,\frac{1}{5}\right)^T$
h) $\lambda_1=6, v_1=\left(0,\,1,\,\frac{1}{2}\right)^T, \lambda_2=4, v_2=\left(0,\,1,\,\frac{1}{3}\right)^T, \lambda_3=2, v_3=(1,\,2,\,1)^T$
i) $\lambda_1=9, v_1=(1,\,0,\,1)^T, \lambda_2=7, v_2=(1,\,1,\,1)^T, \lambda_3=4, v_3=\left(1,\,0,\,\frac{1}{2}\right)^T$
j) $\lambda_1=7, v_1=\left(1,\,-1,\,-\frac{1}{3}\right)^T, \lambda_2=5, v_2=\left(1,\,-\frac{4}{3},\,-\frac{1}{3}\right)^T, \lambda_3=-3, v_3=\left(1,\,-\frac{3}{2},\,-\frac{1}{2}\right)^T$