特征值与特征向量

练习

1. 求矩阵 A 的特征多项式：

a) $\begin{pmatrix} -5 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & -5 & 4 \\ -2 & -2 & 5 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} -4 & -5 & 3 \\ 5 & -4 & -3 \\ -1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} -2 & 3 & -3 \\ 0 & 5 & 4 \\ -5 & -4 & -2 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} -3 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -5 & -1 & -4 \end{pmatrix}$

2. 已知矩阵 A 的一个特征向量为 $\mathbf{v}$，求它所对应的特征值。其中 $A, \mathbf{v}$ 为

a) $v = \left(1,\, \frac{1}{3}\right)^T, A = \begin{pmatrix} -15 & 60 \\ -5 & 20 \end{pmatrix}$

b) $v = \left(1,\, \frac{1}{3}\right)^T, A = \begin{pmatrix} -16 & 48 \\ -4 & 12 \end{pmatrix}$

c) $v = \left(1,\, 0,\, \frac{1}{4}\right)^T, A = \begin{pmatrix} 25 & -66 & -88 \\ 4 & -9 & -16 \\ 2 & -6 & -5 \end{pmatrix}$

d) $v = \left(1,\, -\frac{1}{2},\, 0\right)^T, A = \begin{pmatrix} -40 & -90 & 0 \\ 18 & 41 & 0 \\ -9 & -18 & 5 \end{pmatrix}$

e) $v = (1,\, 0,\, 1)^T, A = \begin{pmatrix} 10 & -24 & -6 \\ 2 & -4 & -2 \\ -1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

f) $v = \left(1,\, 0,\, \frac{1}{2}\right)^T, A = \begin{pmatrix} 65 & 70 & -140 \\ -40 & -45 & 80 \\ 10 & 10 & -25 \end{pmatrix}$

3. 已知矩阵 A 的一个特征值为 λ，求它所对应的特征向量。其中 λ, A 为

a) $\lambda=3, A=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$

b) $\lambda=3, A=\begin{pmatrix} 27 & 96 \\ -8 & -29 \end{pmatrix}$

c) $\lambda=1, A=\begin{pmatrix} 17 & 48 & 0 \\ -4 & -11 & 0 \\ 4 & 12 & 1 \end{pmatrix}$

d) $\lambda=-1, A=\begin{pmatrix} 6 & 28 & -14 \\ -1 & -5 & 2 \\ 1 & 4 & -3 \end{pmatrix}$

e) $\lambda=0, A=\begin{pmatrix} -5 & 5 & -20 \\ -2 & 2 & -8 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

f) $\lambda=-4, A=\begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 2 & -2 & -4 \end{pmatrix}$

4. 求矩阵的特征值与特征向量

a) $A=\begin{pmatrix} -10 & 0 \\ -7 & -3 \end{pmatrix}$

b) $A=\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}$

c) $A=\begin{pmatrix} -26 & 36 \\ -18 & 28 \end{pmatrix}$

d) $A=\begin{pmatrix} 46 & 168 \\ -14 & -52 \end{pmatrix}$

e) $A=\begin{pmatrix} 36 & 3 & 81 \\ -45 & 2 & -123 \\ -15 & -1 & -36 \end{pmatrix}$

f) $A=\begin{pmatrix} 21 & 4 & 68 \\ 10 & 7 & 42 \\ -5 & -1 & -16 \end{pmatrix}$

g) $A=\begin{pmatrix} -59 & -12 & 168 \\ 51 & 17 & -129 \\ -17 & -4 & 48 \end{pmatrix}$

h) $A=\begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 13 & 7 & 0 \\ -13 & -11 & -4 \end{pmatrix}$

i) $A=\begin{pmatrix} -27 & -5 & 44 \\ -34 & -8 & 64 \\ -17 & -5 & 34 \end{pmatrix}$

j) $A=\begin{pmatrix} -41 & -18 & 120 \\ -17 & -8 & 52 \\ -17 & -9 & 53 \end{pmatrix}$

答案

1. a) $r^2+3r-14$ b) r^2-4r-5
c) $r^3+2r^2-14r-24$ d) $r^3+6r^2+43r-70$
e) $r^3-r^2-15r+147$ f) r^3+7r^2+8r+8

2. a) 5 b) 0
c) 5 d) -4
e) 3 f) 5

3. a) $(1,\ -1)^T$ b) $\left(1,\ -\frac{1}{4}\right)^T$
c) $v_1=\left(1,\ -\frac{1}{3},\ 0\right)^T, v_2=(0,\ 0,\ 1)^T$ d) $v_1=\left(1,\ 0,\ \frac{1}{2}\right)^T, v_2=(0,\ 1,\ 2)^T$
e) $v_1=\left(1,\ 0,\ -\frac{1}{4}\right)^T, v_2=\left(0,\ 1,\ \frac{1}{4}\right)^T$ f) $v_1=(1,\ 1,\ 0)^T, v_2=(0,\ 0,\ 1)^T$

4. a) $\lambda_1=-3, v_1=(0,\ 1)^T, \quad \lambda_2=-10, v_2=(1,\ 1)^T$
b) $\lambda_1=5, v_1=(0,\ 1)^T, \quad \lambda_2=-2, v_2=(1,\ 1)^T$
c) $\lambda_1=10, v_1=(1,\ 1)^T, \quad \lambda_2=-8, v_2=\left(1,\ \frac{1}{2}\right)^T$
d) $\lambda_1=4, v_1=\left(1,\ -\frac{1}{4}\right)^T, \quad \lambda_2=-10, v_2=\left(1,\ -\frac{1}{3}\right)^T$
e) $\lambda_1=6, v_1=\left(1,\ -1,\ -\frac{1}{3}\right)^T, \lambda_2=5, v_2=\left(1,\ -\frac{4}{3},\ -\frac{1}{3}\right)^T, \lambda_3=-9, v_3=\left(1,\ -\frac{3}{2},\ -\frac{1}{2}\right)^T$
f) $\lambda_1=6, v_1=\left(1,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{4}\right)^T, \lambda_2=5, v_2=\left(1,\ \frac{1}{4},\ -\frac{1}{4}\right)^T, \lambda_3=1, v_3=\left(1,\ \frac{2}{3},\ -\frac{1}{3}\right)^T$
g) $\lambda_1=9, v_1=\left(1,\ -1,\ \frac{1}{3}\right)^T, \lambda_2=5, v_2=\left(1,\ -\frac{2}{3},\ \frac{1}{3}\right)^T, \lambda_3=-8, v_3=\left(1,\ -\frac{3}{4},\ \frac{1}{4}\right)^T$
h) $\lambda_1=7, v_1=(0,\ 1,\ -1)^T, \lambda_2=-4, v_2=(0,\ 0,\ 1)^T, \lambda_3=-6, v_3=(1,\ -1,\ 1)^T$
i) $\lambda_1=7, v_1=(1,\ 2,\ 1)^T, \lambda_2=2, v_2=(1,\ 3,\ 1)^T, \lambda_3=-10, v_3=\left(1,\ 1,\ \frac{1}{2}\right)^T$
j) $\lambda_1=10, v_1=\left(1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)^T, \lambda_2=1, v_2=\left(1,\ 1,\ \frac{1}{2}\right)^T, \lambda_3=-7, v_3=\left(1,\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{3}\right)^T$