特征值与特征向量

练习

1. 求矩阵 A 的特征多项式:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} -5 & -4 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & 4 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 2 & -5 & -3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & -4 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ -4 & 1 & -4 \\ 0 & -5 & -3 \end{pmatrix}$

2. 已知矩阵 A 的一个特征向量为 $\mathbf{v}$，求它所对应的特征值。其中 $A, \mathbf{v}$ 为

a) $v = (1,\, -1)^T, A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$

b) $v = \left(1,\, \frac{1}{4}\right)^T, A = \begin{pmatrix} -25 & 100 \\ -5 & 20 \end{pmatrix}$

c) $v = \left(1,\, 0,\, \frac{1}{4}\right)^T, A = \begin{pmatrix} -24 & 0 & 100 \\ 20 & 1 & -80 \\ -5 & 0 & 21 \end{pmatrix}$

d) $v = (1,\, 0,\, 1)^T, A = \begin{pmatrix} -4 & -8 & 8 \\ 4 & 8 & -4 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$

e) $v = \left(1,\, 0,\, -\frac{1}{4}\right)^T, A = \begin{pmatrix} 8 & -10 & 20 \\ 4 & -5 & 16 \\ 1 & -2 & 7 \end{pmatrix}$

f) $v = \left(1,\, 0,\, -\frac{1}{4}\right)^T, A = \begin{pmatrix} -8 & 27 & -36 \\ -4 & 13 & -16 \\ -1 & 3 & -3 \end{pmatrix}$

3. 已知矩阵 A 的一个特征值为 λ，求它所对应的特征向量。其中 λ, A 为

a) $\lambda = -2, A = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$

b) $\lambda = 2, A = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$

c) $\lambda = 4, A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 12 \\ 4 & 0 & -12 \\ -2 & 2 & 10 \end{pmatrix}$

d) $\lambda = 3, A = \begin{pmatrix} -9 & 24 & -48 \\ -12 & 27 & -48 \\ -4 & 8 & -13 \end{pmatrix}$

e) $\lambda = 1, A = \begin{pmatrix} 36 & -105 & -35 \\ 15 & -44 & -15 \\ -5 & 15 & 6 \end{pmatrix}$

f) $\lambda = 2, A = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 10 \\ 0 & 2 & 0 \\ -5 & -5 & -8 \end{pmatrix}$

4. 求矩阵的特征值与特征向量

a) $A = \begin{pmatrix} -2 & 24 \\ -2 & 12 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 31 & 108 \\ -9 & -32 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 10 & 18 \\ -9 & -17 \end{pmatrix}$

d) $A = \begin{pmatrix} -11 & 8 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$

e) $A = \begin{pmatrix} -18 & -7 & 52 \\ -48 & -29 & 188 \\ -12 & -7 & 46 \end{pmatrix}$

f) $A = \begin{pmatrix} 46 & 4 & 152 \\ 24 & 11 & 98 \\ -12 & -1 & -40 \end{pmatrix}$

g) $A = \begin{pmatrix} -35 & 84 & 112 \\ -16 & 41 & 64 \\ 4 & -12 & -23 \end{pmatrix}$

h) $A = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 13 \\ -5 & 1 & 11 \\ -5 & -3 & 15 \end{pmatrix}$

i) $A = \begin{pmatrix} 10 & 7 & -21 \\ -39 & -18 & 45 \\ -13 & -7 & 18 \end{pmatrix}$

j) $A = \begin{pmatrix} 11 & 2 & 4 \\ -15 & 2 & -18 \\ -5 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

答案

1. a) r^2-3r+2
   b) $r^2-8r+40$
   c) $r^3+3r^2-20r-10$
   d) $r^3+3r^2-26r+17$
   e) $r^3+r^2+10r+46$
   f) $r^3+3r^2-25r+5$

2. a) 3
   b) 0
   c) -4
   d) 2
   e) 4
   f) 0

3. a) $(0,\ 1)^T$
   b) $\left(1,\ -\frac{1}{2}\right)^T$
   c) $v_1=\left(1,\ 0,\ \frac{1}{3}\right)^T, v_2=\left(0,\ 1,\ -\frac{1}{3}\right)^T$
   d) $v_1=\left(1,\ 0,\ -\frac{1}{4}\right)^T, v_2=\left(0,\ 1,\ \frac{1}{2}\right)^T$
   e) $v_1=(1,\ 0,\ 1)^T, v_2=(0,\ 1,\ -3)^T$
   f) $v_1=\left(1,\ 0,\ -\frac{1}{2}\right)^T, v_2=\left(0,\ 1,\ -\frac{1}{2}\right)^T$

4. a) $\lambda_1=6, v_1=\left(1,\ \frac{1}{3}\right)^T,\quad \lambda_2=4, v_2=\left(1,\ \frac{1}{4}\right)^T$
   b) $\lambda_1=4, v_1=\left(1,\ -\frac{1}{4}\right)^T,\quad \lambda_2=-5, v_2=\left(1,\ -\frac{1}{3}\right)^T$
   c) $\lambda_1=1, v_1=\left(1,\ -\frac{1}{2}\right)^T,\quad \lambda_2=-8, v_2=(1,\ -1)^T$
   d) $\lambda_1=-3, v_1=(1,\ 1)^T,\quad \lambda_2=-7, v_2=\left(1,\ \frac{1}{2}\right)^T$
   e) $\lambda_1=6, v_1=(1,\ 4,\ 1)^T, \lambda_2=-1, v_2=(1,\ 5,\ 1)^T, \lambda_3=-6, v_3=\left(1,\ 2,\ \frac{1}{2}\right)^T$
   f) $\lambda_1=10, v_1=\left(1,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{4}\right)^T, \lambda_2=9, v_2=\left(1,\ \frac{1}{4},\ -\frac{1}{4}\right)^T, \lambda_3=-2, v_3=\left(1,\ \frac{2}{3},\ -\frac{1}{3}\right)^T$
   g) $\lambda_1=-3, v_1=\left(1,\ \frac{4}{7},\ -\frac{1}{7}\right)^T, \lambda_2=-7, v_2=\left(1,\ 0,\ \frac{1}{4}\right)^T, \lambda_3=-7, v_3=\left(0,\ 1,\ -\frac{3}{4}\right)^T$
   h) $\lambda_1=7, v_1=(1,\ 1,\ 1)^T, \lambda_2=4, v_2=(1,\ 2,\ 1)^T, \lambda_3=2, v_3=\left(1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)^T$
   i) $\lambda_1=10, v_1=(1,\ -3,\ -1)^T, \lambda_2=3, v_2=(1,\ -4,\ -1)^T, \lambda_3=-3, v_3=\left(0,\ 1,\ \frac{1}{3}\right)^T$
   j) $\lambda_1=6, v_1=\left(1,\ -\frac{3}{2},\ -\frac{1}{2}\right)^T, \lambda_2=5, v_2=\left(1,\ -2,\ -\frac{1}{2}\right)^T, \lambda_3=1, v_3=(1,\ -3,\ -1)^T$