抽象的数学具体学

罗玉文

博雅教育学会

2022 年 7 月 3 日

目录

前言

数学越学到后面，概念越抽象，运算越抽象。

前言

数学越学到后面，概念越抽象，运算越抽象。
怎么学比较容易呢?

前言

数学越学到后面，概念越抽象，运算越抽象。
怎么学比较容易呢?
用具体的例子和计算来理解和掌握。

用具体的数字来理解变量

例

化简分式

$$\frac{6-x}{2x} =$$

用具体的数字来理解变量

例

化简分式

$$\frac{6-x}{2x} = \frac{6-\cancel{x}}{2\cancel{x}}$$

用具体的数字来理解变量

例

化简分式

$$\frac{6-x}{2x} = \frac{6-\cancel{x}}{2\cancel{x}} = \frac{5}{2}$$

用具体的数字来理解变量

例

化简分式

$$\frac{6-x}{2x} = \frac{6-\cancel{x}}{2\cancel{x}} = \frac{5}{2}$$

请问

$$\frac{6-2}{2\cdot 2} =$$

用具体的数字来理解变量

例

化简分式

$$\frac{6-x}{2x} = \frac{6-\cancel{x}}{2\cancel{x}} = \frac{5}{2}$$

请问

$$\frac{6-2}{2\cdot 2} = \frac{5}{2}?$$

用具体的数字来理解变量

定义

复合函数

用具体的数字来理解变量

定义

复合函数

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

用具体的数字来理解变量

定义

复合函数

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

就是用 $g(x)$ 来代替所有 $f(x)$ 里面的 x。

用具体的数字来理解变量

定义

复合函数

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

就是用 $g(x)$ 来代替所有 $f(x)$ 里面的 x。

例

$$f(x) = x^2 + x + 3, \quad g(x) = 2x + 1$$

用具体的数字来理解变量

定义

复合函数

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

就是用 $g(x)$ 来代替所有 $f(x)$ 里面的 x。

例

$$f(x) = x^2 + x + 3, \quad g(x) = 2x + 1$$

那么

$$f(g(x)) =$$

用具体的数字来理解变量

定义

复合函数

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

就是用 $g(x)$ 来代替所有 $f(x)$ 里面的 x。

例

$$f(x) = x^2 + x + 3, \quad g(x) = 2x + 1$$

那么

$$f(g(x)) = (2x+1)^2 + (2x+1) + 3$$

用具体的数字来理解变量

例

$$f(x) = x^2 + x + 3, \quad g(x) = 2x + 1$$

用具体的数字来理解变量

例

$$f(x) = x^2 + x + 3, \quad g(x) = 2x + 1$$

$$f(2) =$$

用具体的数字来理解变量

例

$$f(x) = x^2 + x + 3, \quad g(x) = 2x + 1$$

$$f(2) = 2^2 + 2 + 3 = 9,$$

用具体的数字来理解变量

例

$$f(x) = x^2 + x + 3, \quad g(x) = 2x + 1$$

$$f(2) = 2^2 + 2 + 3 = 9, \quad f(5) =$$

用具体的数字来理解变量

例

$$f(x) = x^2 + x + 3, \quad g(x) = 2x + 1$$

$$f(2) = 2^2 + 2 + 3 = 9, \quad f(5) = 5^2 + 5 + 3 = 33$$

用具体的数字来理解变量

例

$$f(x) = x^2 + x + 3, \quad g(x) = 2x + 1$$

$$f(2) = 2^2 + 2 + 3 = 9, \quad f(5) = 5^2 + 5 + 3 = 33$$

$$f(a) =$$

用具体的数字来理解变量

例

$$f(x) = x^2 + x + 3, \quad g(x) = 2x + 1$$

$$f(2) = 2^2 + 2 + 3 = 9, \quad f(5) = 5^2 + 5 + 3 = 33$$

$$f(a) = a^2 + a + 3,$$

用具体的数字来理解变量

例

$$f(x) = x^2 + x + 3, \quad g(x) = 2x + 1$$

$$f(2) = 2^2 + 2 + 3 = 9, \quad f(5) = 5^2 + 5 + 3 = 33$$

$$f(a) = a^2 + a + 3, \quad f(b) =$$

用具体的数字来理解变量

例

$$f(x) = x^2 + x + 3, \quad g(x) = 2x + 1$$

$$f(2) = 2^2 + 2 + 3 = 9, \quad f(5) = 5^2 + 5 + 3 = 33$$

$$f(a) = a^2 + a + 3, \quad f(b) = b^2 + b + 3$$

用具体的数字来理解变量

例

$$f(x) = x^2 + x + 3, \quad g(x) = 2x + 1$$

$$f(2) = 2^2 + 2 + 3 = 9, \quad f(5) = 5^2 + 5 + 3 = 33$$

$$f(a) = a^2 + a + 3, \quad f(b) = b^2 + b + 3$$

$$f(a+1) =$$

用具体的数字来理解变量

例

$$f(x) = x^2 + x + 3, \quad g(x) = 2x + 1$$

$$f(2) = 2^2 + 2 + 3 = 9, \quad f(5) = 5^2 + 5 + 3 = 33$$

$$f(a) = a^2 + a + 3, \quad f(b) = b^2 + b + 3$$

$$f(a+1) = (a+1)^2 + (a+1) + 3$$

用具体的数字来理解变量

例

$$f(x) = x^2 + x + 3, \quad g(x) = 2x + 1$$

$$f(2) = 2^2 + 2 + 3 = 9, \quad f(5) = 5^2 + 5 + 3 = 33$$

$$f(a) = a^2 + a + 3, \quad f(b) = b^2 + b + 3$$

$$f(a+1) = (a+1)^2 + (a+1) + 3$$

最后

用具体的数字来理解变量

例

$$f(x) = x^2 + x + 3, \quad g(x) = 2x + 1$$

$$f(2) = 2^2 + 2 + 3 = 9, \quad f(5) = 5^2 + 5 + 3 = 33$$

$$f(a) = a^2 + a + 3, \quad f(b) = b^2 + b + 3$$

$$f(a+1) = (a+1)^2 + (a+1) + 3$$

最后

$$f(g(x)) =$$

用具体的数字来理解变量

例

$$f(x) = x^2 + x + 3, \quad g(x) = 2x + 1$$

$$f(2) = 2^2 + 2 + 3 = 9, \quad f(5) = 5^2 + 5 + 3 = 33$$

$$f(a) = a^2 + a + 3, \quad f(b) = b^2 + b + 3$$

$$f(a+1) = (a+1)^2 + (a+1) + 3$$

最后

$$f(g(x)) = f(2x+1) =$$

用具体的数字来理解变量

例

$$f(x) = x^2 + x + 3, \quad g(x) = 2x + 1$$

$$f(2) = 2^2 + 2 + 3 = 9, \quad f(5) = 5^2 + 5 + 3 = 33$$

$$f(a) = a^2 + a + 3, \quad f(b) = b^2 + b + 3$$

$$f(a+1) = (a+1)^2 + (a+1) + 3$$

最后

$$f(g(x)) = f(2x+1) = (2x+1)^2 + (2x+1) + 3$$

无限并与无限交

例

若 $A_n = (-\infty, -\frac{1}{n}] \cup [\frac{1}{n}, \infty)$,

无限并与无限交

例

若 $A_n = (-\infty, -\frac{1}{n}] \cup [\frac{1}{n}, \infty)$，求

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

无限并与无限交

例

若 $A_n = (-\infty, -\frac{1}{n}] \cup [\frac{1}{n}, \infty)$，求

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

我们先把表达式写得更具体一点

无限并与无限交

例

若 $A_n = (-\infty, -\frac{1}{n}] \cup [\frac{1}{n}, \infty)$，求

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

我们先把表达式写得更具体一点

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots$$

无限并与无限交

例

若 $A_n = (-\infty, -\frac{1}{n}] \cup [\frac{1}{n}, \infty)$，求

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

我们先把表达式写得更具体一点

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots$$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots$$

无限并与无限交

例

$$A_n = (-\infty, -\frac{1}{n}] \cup [\frac{1}{n}, \infty)$$

无限并与无限交

例

$$A_n = (-\infty, -\frac{1}{n}] \cup [\frac{1}{n}, \infty)$$

$$A_1 = (-\infty, -1] \cup [1, \infty), A_2 = (-\infty, -\frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2}, \infty),$$
$$A_3 = (-\infty, -\frac{1}{3}] \cup [\frac{1}{3}, \infty), \cdots$$

无限并与无限交

例

$$A_n = (-\infty, -\frac{1}{n}] \cup [\frac{1}{n}, \infty)$$

$$A_1 = (-\infty, -1] \cup [1, \infty), A_2 = (-\infty, -\frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2}, \infty),$$
$$A_3 = (-\infty, -\frac{1}{3}] \cup [\frac{1}{3}, \infty), \cdots$$

所以

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n =$$

无限并与无限交

例

$$A_n = (-\infty, -\frac{1}{n}] \cup [\frac{1}{n}, \infty)$$

$$A_1 = (-\infty, -1] \cup [1, \infty), A_2 = (-\infty, -\frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2}, \infty),$$
$$A_3 = (-\infty, -\frac{1}{3}] \cup [\frac{1}{3}, \infty), \cdots$$

所以

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots =$$

无限并与无限交

例

$$A_n = (-\infty, -\frac{1}{n}] \cup [\frac{1}{n}, \infty)$$

$$A_1 = (-\infty, -1] \cup [1, \infty), A_2 = (-\infty, -\frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2}, \infty),$$
$$A_3 = (-\infty, -\frac{1}{3}] \cup [\frac{1}{3}, \infty), \cdots$$

所以

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots = (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$$

无限并与无限交

例

$$A_n = (-\infty, -\frac{1}{n}] \cup [\frac{1}{n}, \infty)$$

$$A_1 = (-\infty, -1] \cup [1, \infty), A_2 = (-\infty, -\frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2}, \infty),$$
$$A_3 = (-\infty, -\frac{1}{3}] \cup [\frac{1}{3}, \infty), \cdots$$

无限并与无限交

例

$$A_n=(-\infty,-\frac{1}{n}]\cup[\frac{1}{n},\infty)$$

$$A_1=(-\infty,-1]\cup[1,\infty),A_2=(-\infty,-\frac{1}{2}]\cup[\frac{1}{2},\infty),$$
$$A_3=(-\infty,-\frac{1}{3}]\cup[\frac{1}{3},\infty),\cdots$$

同理

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n=$$

无限并与无限交

例

$$A_n = (-\infty, -\frac{1}{n}] \cup [\frac{1}{n}, \infty)$$

$$A_1 = (-\infty, -1] \cup [1, \infty), A_2 = (-\infty, -\frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2}, \infty),$$
$$A_3 = (-\infty, -\frac{1}{3}] \cup [\frac{1}{3}, \infty), \cdots$$

同理

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots =$$

无限并与无限交

例

$$A_n = (-\infty, -\frac{1}{n}] \cup [\frac{1}{n}, \infty)$$

$$A_1 = (-\infty, -1] \cup [1, \infty), A_2 = (-\infty, -\frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2}, \infty),$$
$$A_3 = (-\infty, -\frac{1}{3}] \cup [\frac{1}{3}, \infty), \cdots$$

同理

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$$

集合族的交与并

例

设

$$X_t = \left\{ x \in \mathbb{R} \middle| 1 + \frac{1}{t} < x < 2 + \frac{1}{t} \right\}$$

集合族的交与并

例

设

$$X_t = \left\{ x \in \mathbb{R} \middle| 1 + \frac{1}{t} < x < 2 + \frac{1}{t} \right\}$$

求

$$\bigcap_{t>0} X_t,$$

集合族的交与并

例

设

$$X_t = \left\{ x \in \mathbb{R} \middle| 1 + \frac{1}{t} < x < 2 + \frac{1}{t} \right\}$$

求

$$\bigcap_{t>0} X_t, \quad \bigcap_{t>1} X_t,$$

集合族的交与并

例

设

$$X_t = \left\{ x \in \mathbb{R} \middle| 1 + \frac{1}{t} < x < 2 + \frac{1}{t} \right\}$$

求

$$\bigcap_{t>0} X_t, \quad \bigcap_{t>1} X_t, \quad \bigcup_{t>0} X_t$$

集合族的交与并

例

$$X_t = \left\{ x \in \mathbb{R} \middle| 1 + \frac{1}{t} < x < 2 + \frac{1}{t} \right\}$$

$$X_{0.001} = \{x | 1001 < x < 1002\} = (1001, 1002),$$

集合族的交与并

例

$$X_t = \left\{ x \in \mathbb{R} \middle| 1 + \frac{1}{t} < x < 2 + \frac{1}{t} \right\}$$

$$X_{0.001} = \{x | 1001 < x < 1002\} = (1001, 1002),$$

$$X_1 = (2, 3),$$

集合族的交与并

例

$$X_t = \left\{ x \in \mathbb{R} \middle| 1 + \frac{1}{t} < x < 2 + \frac{1}{t} \right\}$$

$$X_{0.001} = \{x | 1001 < x < 1002\} = (1001, 1002),$$

$$X_1 = (2, 3), X_2 = (\frac{3}{2}, \frac{5}{2}),$$

集合族的交与并

例

$$X_t = \left\{ x \in \mathbb{R} \middle| 1 + \frac{1}{t} < x < 2 + \frac{1}{t} \right\}$$

$$X_{0.001} = \{x | 1001 < x < 1002\} = (1001, 1002),$$

$$X_1 = (2, 3), X_2 = (\frac{3}{2}, \frac{5}{2}), X_{1000} = (1.001, 2.001), \cdots$$

观察一下可以得到

$$\bigcap_{t>0} X_t = \emptyset,$$

集合族的交与并

例

$$X_t = \left\{ x \in \mathbb{R} \middle| 1 + \frac{1}{t} < x < 2 + \frac{1}{t} \right\}$$

$$X_{0.001} = \{x | 1001 < x < 1002\} = (1001, 1002),$$

$$X_1 = (2, 3), X_2 = (\frac{3}{2}, \frac{5}{2}), X_{1000} = (1.001, 2.001), \cdots$$

观察一下可以得到

$$\bigcap_{t>0} X_t = \emptyset, \bigcup_{t>0} X_t = (1, \infty)$$

集合族的交与并

例

$$X_t = \left\{ x \in \mathbb{R} \middle| 1 + \frac{1}{t} < x < 2 + \frac{1}{t} \right\}$$

$$X_{1.001} = (1.999, 2.999),$$

集合族的交与并

例

$$X_t = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| 1 + \frac{1}{t} < x < 2 + \frac{1}{t}\right\}$$

$$X_{1.001} = (1.999, 2.999),$$

$$X_2 = (\frac{3}{2}, \frac{5}{2}),$$

集合族的交与并

例

$$X_t = \left\{ x \in \mathbb{R} \middle| 1 + \frac{1}{t} < x < 2 + \frac{1}{t} \right\}$$

$$X_{1.001} = (1.999, 2.999),$$

$$X_2 = (\frac{3}{2}, \frac{5}{2}), X_{1000} = (1.001, 2.001), \cdots$$

观察一下也可以得到

$$\bigcap_{t>1} X_t = \{2\}$$

线性子空间

定义

我们说一个 $\mathbb{R}^n$ 上的一个子集 $\mathcal{U}$ 是一个线性子空间是指它满足这三个条件:

线性子空间

定义

我们说一个 $\mathbb{R}^n$ 上的一个子集 $\mathcal{U}$ 是一个线性子空间是指它满足这三个条件：

1. $\vec{0} \in \mathcal{U}$;

线性子空间

定义

我们说一个 $\mathbb{R}^n$ 上的一个子集 $\mathcal{U}$ 是一个线性子空间是指它满足这三个条件:

1. $\vec{0} \in \mathcal{U}$;
2. 如果 $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{U}$，那么 $\vec{x} + \vec{y} \in \mathcal{U}$;

线性子空间

定义

我们说一个 $\mathbb{R}^n$ 上的一个子集 $\mathcal{U}$ 是一个线性子空间是指它满足这三个条件：

1. $\vec{0} \in \mathcal{U}$;
2. 如果 $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{U}$，那么 $\vec{x} + \vec{y} \in \mathcal{U}$;
3. 如果 $\vec{x} \in \mathcal{U}$，那么对任意的 $\lambda \in \mathbb{R}$，有 $\lambda\vec{x} \in \mathcal{U}$。
   就是任何两个元素之和在集合里面，任何一个元素的数乘也在集合里面。

线性子空间

例

集合

$$\mathcal{U} = \left\{ \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}, x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

是 $\mathbb{R}^3$ 上的一个线性子空间。

线性子空间

例

$$\mathcal{U} = \left\{ \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}, x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

线性子空间

例

$$\mathcal{U} = \left\{ \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}, x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{U},$$

线性子空间

例

$$\mathcal{U} = \left\{ \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}, x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{U}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{U}$$

线性子空间

例

$$\mathcal{U} = \left\{ \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}, x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{U}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{U}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{U},$$

线性子空间

例

$$\mathcal{U}=\left\{\vec{x}=\begin{pmatrix}x\\y\\0\end{pmatrix},x,y\in\mathbb{R}\right\}$$

$$\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\in\mathcal{U},\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}\in\mathcal{U}$$

$$\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\3\\0\end{pmatrix}\in\mathcal{U},\quad 3\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\6\\0\end{pmatrix}\in\mathcal{U}$$

集合上的拓扑

定义

一个集合 X 上的拓扑是指 X 的一个子集的集合 $\mathcal{T}$，满足：

集合上的拓扑

定义

一个集合 X 上的拓扑是指 X 的一个子集的集合 $\mathcal{T}$，满足：

1. $X \in \mathcal{T}, \emptyset \in \mathcal{T}$:

集合上的拓扑

定义

一个集合 X 上的拓扑是指 X 的一个子集的集合 $\mathcal{T}$，满足：

1. $X \in \mathcal{T}, \emptyset \in \mathcal{T}$;
2. 任何个 $\mathcal{T}$ 里的元素的并也在 $\mathcal{T}$ 里（无限并在 $\mathcal{T}$ 中）;

集合上的拓扑

定义

一个集合 X 上的拓扑是指 X 的一个子集的集合 $\mathcal{T}$，满足：

1. $X \in \mathcal{T}, \emptyset \in \mathcal{T}$;
2. 任何个 $\mathcal{T}$ 里的元素的并也在 $\mathcal{T}$ 里（无限并在 $\mathcal{T}$ 中）;
3. $\mathcal{T}$ 中有限个元素的交也在 $\mathcal{T}$ 中（有限交在 $\mathcal{T}$ 中）。

拓扑的例子

例

设 $X = \{a, b\}$,

拓扑的例子

例

设 $X = \{a, b\}$，则 X 的所有子集为 $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$，

拓扑的例子

例

设 $X = \{a, b\}$，则 X 的所有子集为 $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$,可以定义 $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}\}$。

拓扑的例子

例

设 $X = \{a, b\}$，则 X 的所有子集为 $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$,可以定义 $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}\}$。可以验证

拓扑的例子

例

设 $X = \{a, b\}$，则 X 的所有子集为 $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$,可以定义 $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}\}$。可以验证

1. $\emptyset \in \mathcal{T}, \quad X = \{a, b\} \in \mathcal{T}$

拓扑的例子

例

设 $X = \{a, b\}$，则 X 的所有子集为 $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$,可以定义 $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}\}$。可以验证

1. $\emptyset \in \mathcal{T}, \quad X = \{a, b\} \in \mathcal{T}$

拓扑的例子

例

设 $X=\{a,b\}$，则 X 的所有子集为 $\{\emptyset,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$,可以定义 $\mathcal{T}=\{\emptyset,\{a\},\{a,b\}\}$。可以验证

1. $\emptyset\in\mathcal{T},\quad X=\{a,b\}\in\mathcal{T}$
2. $\emptyset\cup\{a\}=\{a\}\in\mathcal{T},\emptyset\cup\{a,b\}=\{a,b\}\in\mathcal{T},$ $\{a\}\cup\{a,b\}=\{a,b\}\in\mathcal{T},\emptyset\cup\{a\}\cup\{a,b\}=\{a,b\}\in\mathcal{T}$

拓扑的例子

例

设 $X=\{a,b\}$，则 X 的所有子集为 $\{\emptyset,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$,可以定义 $\mathcal{T}=\{\emptyset,\{a\},\{a,b\}\}$。可以验证

1. $\emptyset\in\mathcal{T}$, $\quad X=\{a,b\}\in\mathcal{T}$
2. $\emptyset\cup\{a\}=\{a\}\in\mathcal{T},\emptyset\cup\{a,b\}=\{a,b\}\in\mathcal{T},$
   $\{a\}\cup\{a,b\}=\{a,b\}\in\mathcal{T},\emptyset\cup\{a\}\cup\{a,b\}=\{a,b\}\in\mathcal{T}$

拓扑的例子

例

设 $X=\{a,b\}$，则 X 的所有子集为 $\{\emptyset,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$,可以定义 $\mathcal{T}=\{\emptyset,\{a\},\{a,b\}\}$。可以验证

1. $\emptyset\in\mathcal{T}, \quad X=\{a,b\}\in\mathcal{T}$
2. $\emptyset\cup\{a\}=\{a\}\in\mathcal{T},\emptyset\cup\{a,b\}=\{a,b\}\in\mathcal{T},$ $\{a\}\cup\{a,b\}=\{a,b\}\in\mathcal{T},\emptyset\cup\{a\}\cup\{a,b\}=\{a,b\}\in\mathcal{T}$
3. $\emptyset\cap\{a\}=\emptyset\in\mathcal{T},\emptyset\cap\{a,b\}=\emptyset\in\mathcal{T},$ $\{a\}\cap\{a,b\}=\{a\}\in\mathcal{T},\emptyset\cap\{a\}\cap\{a,b\}=\emptyset\in\mathcal{T}$

拓扑的例子

例

定义 $\mathcal{T}_2=\{\emptyset,\{a\},\{b\}\}$，那么 $\mathcal{T}_2$ 不是 X 上的一个拓扑。因为

$$\{a\}\cup\{b\}=\{a,b\}=X\notin\mathcal{T}_2$$

所以 $\mathcal{T}_2$ 不是 X 上的拓扑。

最后的话

注记

- 例子越简单，越具体，越能理解抽象的定义与定理；

最后的话

注记

- 例子越简单，越具体，越能理解抽象的定义与定理；
- 例子不能代替证明，只能帮助理解；

最后的话

注记

- 例子越简单，越具体，越能理解抽象的定义与定理；
- 例子不能代替证明，只能帮助理解；
- 高年级的课程，总是能在低年级课程里面找到例子

致谢

谢　谢　大　家　！