如何计算对坐标的曲面积分

罗玉文

四都教育 www.sudoedu.com

1 计算方法

对坐标的曲面积分的计算方法主要是三种：直接计算，利用向量形式的曲面积分（两类曲面积分的关系），以及利用高斯公式来计算。

1.1 直接计算

直接计算的话，就是将曲面积分化成二重积分来算，例如

$$\iint_S R(x,y,z)dxdy = \pm \iint_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))dxdy$$

这里 D_{xy} 就是曲面在 xOy 平面上的投影，如果是曲面的上侧，取正号，如果是曲面的下侧，则取负号。同理

$$\iint_S Q(x,y,z)dzdx = \pm \iint_{D_{zx}} Q(x,y(x,z),z)dzdx$$

D_{zx} 就是曲面在 xOz 平面上的投影，曲面右侧取正，左侧取负；

$$\iint_S P(x,y,z)dydz = \pm \iint_{D_{yz}} Q(x(y,z),y,z)dydz$$

D_{yz} 就是曲面在 yOz 平面上的投影，前侧取正，后侧取负。

1.2 利用曲面积分的向量形式（两类曲面积分的关系）

因为

$$\iint_S P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy = \iint_S \vec{F}(x,y,z)\cdot\vec{n}dS$$

这里 $\vec{F}=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))$， $\vec{n}$ 是曲面的单位法向量。我们分两种情况计算。

1，曲面由 $z=f(x,y)$ 给出，则

$$\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}dS=\pm\iint_D(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))\cdot(-f_x,-f_y,1)dxdy$$

如果曲面是上侧，就取正，如果曲面是下侧，就取负。

这是因为如果曲面取上侧，曲面法向量的第三个分量为正，所曲面的法向量为 $\vec{N}=(-f_x,-f_y,1)$；曲面下侧，第三个分量取负，所以 $\vec{N}=(f_x,f_y,-1)$。单位法向量为

$$\vec{n}=\pm\frac{1}{\sqrt{f_x^2+f_y^2+1}}(-f_x,-f_y,1)$$

而面积元

$$dS=\sqrt{f_x^2+f_y^2+1}dxdy$$

联合起来，就是

$$\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}dS=\pm\iint_D(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))\cdot(-g_x,-g_y,1)dxdy$$

2，曲面由隐函数 $G(x,y,z)=0$ 给出，由隐函数求导公式及上面的结论，得到

$$\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}dS=\pm\iint_D(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))\cdot(\frac{G_x}{G_z},\frac{G_y}{G_z},1)dxdy$$

1.3 利用高斯公式

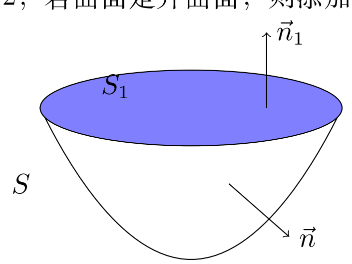
闭曲面上的积分首先要考虑高斯公式。分两种情况：

1，若曲面积分是在闭曲面上进行，则直接应用高斯公式，

$$\oiint_S P(x,y,z)dydz+Q(x,y,z)dzdx+R(x,y,z)dxdy=\iiint_V\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dV$$

这里 V 是曲面 S 所围成的立体。

2，若曲面是开曲面，则添加辅助曲面使之成为闭曲面，



再应用高斯公式，最后减去辅助曲面上的积分即得原积分的值，

$$\iint_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dV - \iint_{S_1} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$$

对于闭曲面内部有奇点的情形，也可以仿照格林公式，挖去奇点，应用高斯公式在复连通立体上，再减去内部闭曲面上的积分就得到原积分。但是这种方法在高数课程里一般涉及，我们就不做介绍了。

2 计算方法举例

例 1： 计算曲面积分 $\iint_S xyzdxdy$，其中 S 是球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的外侧在 $x \geq 0, y \geq 0$ 的部分。

解:曲面可以分为上、下两部分,上半部分的表达式为 $S_1: z = \sqrt{1-x^2-y^2}, x, y \geq 0$,法向量朝上,积分符号为正;下半部分的表达式为 $S_2: z = -\sqrt{1-x^2-y^2}, x, y \geq 0$，法向量朝下，积分符号为负。它们的投影区域都是 $D = \{(x,y)|x^2+y^2 \leq 1, x, y \geq 0\}$。所以曲面积分为

$$\begin{aligned}\iint_S xyzdxdy &= \iint_{S_1} xyzdxdy + \iint_{S_2} xyzdxdy \\ &= \iint_D xy(\sqrt{1-x^2-y^2})dxdy - \iint_D xy(-\sqrt{1-x^2-y^2})dxdy \\ &= 2\iint_D xy(\sqrt{1-x^2-y^2})dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 r\cos t r \sin t \sqrt{1-r^2} rdrd\theta\end{aligned}$$

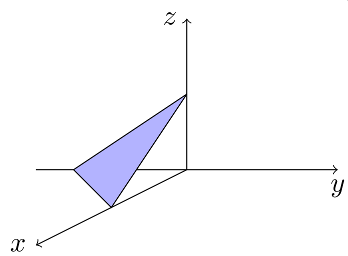
令 $u = 1-r^2$，则 $du = -2rdr, r^2 = 1-u$，所以

$$\begin{aligned}
2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 r\cos tr\sin t\sqrt{1-r^2}rdrd\theta &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_1^0(1-u)\cos t\sin t\sqrt{u}(-\frac{1}{2}du)d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 \cos t\sin t(\sqrt{u}-u^{3/2})dudt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\sin t\left(\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}}\right)\Big|_0^1 dt \\
&= \frac{4}{15}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\sin tdt = \frac{4}{15}\cdot\frac{1}{2}\sin^2 t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{2}{15}
\end{aligned}$$

例 2, 计算积分 $\iint_S (f(x,y,z)+x)dydz+(2f(x,y,z)+y)dzdx+[f(x,y,z)+z]dxdy$，其中 $f(x,y,z)$ 是连续函数，S 是平面 $x-y+z=1$ 在第四卦限部分的上侧。

解：这里 $f(x,y,z)$ 是连续函数，具体形式不知道，所以不能应用直接计算方式；又因为它只是连续函数，没有可不可导的条件，也不能应用高斯公式，所以只有利用向量形式（或者两类曲面积分的关系）的曲面积分，希望能够消去 $f(x,y,z)$，然后再积分。

因为 $S: z=1-x+y$, 曲面取上侧, 所以 $\vec{N}=(-f_x,-f_y,1)=(1,-1,1)$，曲面在 xOy 平面的投影为 $D=\{(x,y)|0\le x\le 1, x-1\le y\le 0\}$，



曲面积分为

$$\begin{aligned}\iint_S (f(x,y,z)+x)dydz+(2f(x,y,z)+y)dzdx+[f(x,y,z)+z]dxdy &= \iint_D \vec{F}\cdot\vec{N}dxdy \\ &= \iint_D (f(x,y,z)+x, 2f(x,y,z)+y, f(x,y,z)+z)\cdot(1,-1,1)dxdy \\ &= \iint_D (x-y+z)dxdy = \iint_D (x-y+1-x+y)dxdy \\ &= \iint_D dxdy = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

最后的结果是因为投影区域是直角三角形，两个底边长都是 1，它的面积是 $\frac{1}{2}$。

例 3：求积分 $\oiint_S (x-y)dxdy+(y-z)xdydz$，其中 S 是柱面 $x^2+y^2=1$ 及平面 $z=0, z=3$ 所围成的闭曲面的外侧。

解：这里 $P(x,y,z)=(y-z)x, Q(x,y,z)=0, R(x,y,z)=x-y$，曲面外侧，所以可以直接应用高斯公式

$$\begin{aligned}\oiint_S (x-y)dxdy+(y-z)xdydz &= \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dV \\ &= \iiint_V \left(\frac{\partial}{\partial x}((y-z)x)+\frac{\partial}{\partial z}(x-y)\right)dV \\ &= \iiint_V (y-z)dV\end{aligned}$$

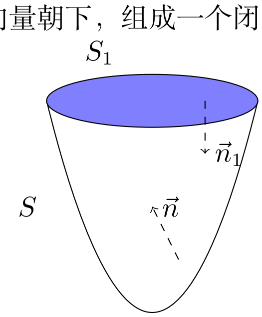
因为这个闭曲面所围成的部分是圆柱体，所以应用柱坐标来计算三重积分比较简便，

$$\begin{aligned}
\iiint_V (y-z)dV &= \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^3 (r\sin\theta - z)r dz dr d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(r^2\sin\theta z - \frac{1}{2}rz^2\right)\Big|_0^3 dr d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(3r^2\sin\theta - \frac{9}{2}r\right) dr d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left(r^3\sin\theta - \frac{9}{4}r^2\right)\Big|_0^1 d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\sin\theta - \frac{9}{4}\right) d\theta = \left(-\cos\theta - \frac{9}{4}\theta\right)\Big|_0^{2\pi} \\
&= -\frac{9}{2}\pi
\end{aligned}$$

下一个例子，我们看一下如何利用高斯公式求一个开曲面的曲面积分。我们先添加一个辅助曲面将开曲面变成闭曲面，然后利用高斯公式计算闭曲面上的积分，最后再减去辅助曲面上的积分，就得到我们所求的曲面积分。

例 4：求曲面积分 $\iint_S \left(-\frac{1}{3}x^3 + e^{z^2}\right) dydz + \left(-\frac{1}{3}y^3 + x\tan z\right) dzdx + 4zdxdy$，其中 S 为 $z = x^2 + y^2$ 在平面 $z = 4$ 以下的部分，上侧。

解：这是一个开曲面，我们给它加上一个盖子 $S_1 : z = 4, x^2 + y^2 \leq 4$ ，法向量朝下，组成一个闭曲面，



这个闭曲面的法向量是朝内的，所以

$$\begin{aligned}
\iint_S + \iint_{S_1} &= -\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dxdydz \\
&= \iiint_V (-x^2 - y^2 + 4) dV
\end{aligned}$$

这个积分区域的投影是圆 $x^2 + y^2 \leq 4$，下曲面是 $z = x^2 + y^2 = r^2$，上

曲面是 $z=4$，所以利用柱坐标计算，

$$V=\{(r,\theta,z)|0\le\theta\le 2\pi, 0\le r\le 2, r^2\le z\le 4\}$$

我们有

$$\begin{aligned}\iiint_V(-x^2-y^2+4)dV &= \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_{r^2}^4(4-r^2)rdzdrd\theta\\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_{r^2}^4 r(4-r^2)z\Big|_{r^2}^4 drd\theta\\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_{r^2}^4 r(16-8r^2+r^4)drd\theta\\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^2(8r^2-2r^4+\frac{1}{6}r^6)\Big|_0^2 d\theta=\frac{32}{5}\theta\Big|_0^{2\pi}\\ &= \frac{64}{5}\pi\end{aligned}$$

现在计算辅助曲面 S_1 的上积分，因为 $S_1: z=4, x^2+y^2\le 4$，所以 $dz=0$。又因为它的法向量朝下，所以积分号为负，

$$\iint_{S_1}\left(-\frac{1}{3}x^3+e^{z^2}dydz+\left(-\frac{1}{3}y^3+x\tan z\right)dzdx+4zdxdy\right)=-\iint_{x^2+y^2\le 4}16dxdy=-16\cdot 4\pi$$

这里，1 的积分就是平面区域的面积，而圆 $x^2+y^2\le 4$ 的面积为 4π。

所以

$$\begin{aligned}&\iint_S\left(-\frac{1}{3}x^3+e^{z^2}\right)dydz+\left(-\frac{1}{3}y^3+x\tan z\right)dzdx+4zdxdy\\ &= -\iiint_V\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dxdydz\\ &\quad -\iint_{S_1}Pdydz+Qdzdx+Rdxdy\\ &= -\frac{64}{5}\pi+64\pi=\frac{256}{5}\pi\end{aligned}$$

3 习题与答案

最后给出一些习题，供同学们练习。

1，计算曲面积分 $\iint_S y^3dydz+z^2dzdx+xdxdy$，其中 S 是曲面 $z=4-x^2-y^2$ 位于平面 $z=2x+1$ 上方的部分，方向朝下。

2，设 S 是曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}, x^2+y^2\le 4$ 的下侧，$f(x,y)$ 是连续函数，计算

$$\iint_S (xf(x,y)+2xy-y)dydz+(yf(x,y)+2y+x)dzdx+(zf(x,y)+z)dxdy$$

3，设空间立体 V 由平面 $2x+y+2z=2$ 与三个坐标面围成，S 是它的外表面，计算曲面积分

$$\oiint_S (x^2+1)dydz-2ydzdx+3zdxdy$$

4，求曲面积分 $\iint_S (y\cos(y^2)+z-1)dydz+\dfrac{z}{x+1}dzdx+xye^{z^2}dxdy$，其中 S 是其中一个顶点在原点，整个位于第一卦限的无底单位正方体，法向量朝向外。

5，求曲面积分 $\iint_S z^3\sin e^ydydz+z^3e^{x^2\sin z}dzdx+(y^2+z)dxdy$，其中 S 是下半球面 $x^2+y^2+z^2=4$，方向朝上。

答案：**1** 0 **2** 0 **3** $\frac{1}{2}$ **4** $\frac{e}{4}$ **5** $\frac{4}{3}\pi^3$