

如何计算对坐标的曲线积分

罗玉文

luoyuwen@sudoedu.com

微信: kevin_math

本文是文章 [如何计算对坐标的曲线积分](#) 的离线版本。如果要查看在线版本，请前往网站阅读。

1 计算方法

对坐标的曲线积分的计算方式有很多种，我们所知道或者教材上提到过的就有：直接计算，利用格林公式计算，利用 Stokes 公式，利用积分与路径无关以及全微分求积等等。而且有些方法在不同情况下还有不同的变化。这么多方法，再加上对坐标的曲线积分还需要分方向等等，造成了很多同学感觉对坐标的曲线积分很难的印象。

这一篇文章里我们总结一下求对坐标的曲线积分的方法，以及每种方法的应用情况，这样，我们遇到对坐标的曲线积分时，能够采用针对性的方法来求。

事实上，我们只需要掌握两种方法即可：直接计算法和利用格林公式求积分两种方法。因为能够采用全微分求积或者积分路径无关的方法来求曲线积分的，采用格林公式来求更简单直接。所以我们只总结这两种方法。

对于三维闭曲线上的积分，可以应用 Stokes 公式来求，但它的思想与平面上的格林公式一致，我们只简单介绍一下它的方法。

1, 直接计算法：我们根据曲线 L 的表达式的不同形式，将曲线积分化成定积分来计算。

(1) 若曲线 L 是由参数方程 $x = \phi(t), y = \psi(t)$ 给出， t 从 α 到 β ,

其中 $t = \alpha$ 对应起点, $t = \beta$ 对应终点, 那么积分

$$\begin{aligned} \int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy \\ = \int_{\alpha}^{\beta} P(\phi(t), \psi(t)) \cdot \phi'(t)dt + Q(\phi(t), \psi(t)) \cdot \psi'(t)dt \end{aligned}$$

其中 x, y 都用 t 表示。这里要注意的是, 这里不管 α 和 β 谁大谁小, 起点就是下限, 终点在上限, 这一点跟对弧长的曲线积分不同。

(2) 若曲线 L 是由参数方程 $x = \phi(t), y = \psi(t), z = \gamma(t)$ 给出, t 从 α 到 β , 其中 $t = \alpha$ 对应起点, $t = \beta$ 对应终点, 那么积分

$$\begin{aligned} \int_L P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz \\ = \int_{\alpha}^{\beta} P(\phi(t), \psi(t), \gamma(t)) \cdot \phi'(t)dt \\ + Q(\phi(t), \psi(t), \gamma(t)) \cdot \psi'(t)dt \\ + R(\phi(t), \psi(t), \gamma(t)) \cdot \gamma'(t)dt \end{aligned}$$

其中 x, y, z 都用 t 表示。剩下的部分就是计算定积分了。

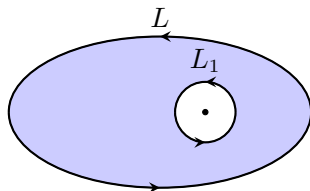
(3) 若曲线是由一个函数 $y = f(x)$, x 从 a 到 b , 那么积分

$$\int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_a^b P(x, f(x)) + Q(x, f(x)) \cdot f'(x)dx$$

2. 若 L 是平面曲线, 则可以用格林公式来计算。

(1) 若 L 是平面闭曲线, 且在曲线内部 $P(x, y), Q(x, y)$ 有一阶连续偏导数, 这种情况可以直接应用格林公式;

(2) 若 L 是平面闭曲线, 但是在曲线内部 $P(x, y), Q(x, y)$ 有奇点 (一阶偏导数不存在或者不连续),



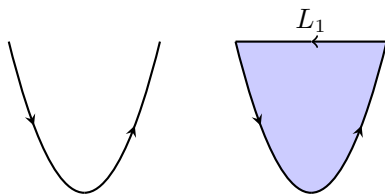
这种情况我们通过添加辅助线, 将奇点挖掉, 然后应用格林公式。最后

将辅助线上的积分减去，就得到了原来的曲线积分的值，

$$\oint_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dydx - \oint_{L_1} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

这里 L 取正向， L_1 取反向（顺时针方向）。

(3) 若 L 是平面开曲线，我们可以通过添加简单的辅助线（为了方便计算），



使新的曲线成为一个简单闭曲线，然后应用格林公式，最后减去辅助线上的积分，就得到原曲线积分的值。

$$\oint_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy - \int_{L_1} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

3, 若 L 是一个空间闭曲线，则可应用 Stokes 公式，将曲线积分化成曲面积分。在曲面的选择上，可以选择比较简单的、容易计算的曲面来进行计算。（因为以 L 为边界的曲面很多，我们可以选择最简单的曲面。）这里我们不做详细介绍。

理论上来说，空间开曲线也可以通过添加辅助线的方式来应用 Stokes 公式，但一般来说，这样的计算相对繁琐，我们一般不考虑。

4, 计算方法选择：现在的问题是在什么情况采取什么方法来求积分？

基本的思想是：(1) 闭曲线，基本上采用格林公式或者 Stokes 公式来求，不管内部是不是有奇点；

(2) 开曲线：如果曲线简单（例如直线）并且被积函数简单，直接计算；

(3) 开曲线：如果曲线复杂，或者被积函数复杂，采用格林公式计算。

现在我们来看如何应用上述的结论。

2 计算举例

例 1, 求积分 $\int_L (x+y)dx + (y-x)dy$, 其中 L 是抛物线 $y^2 = x$ 从点 $(1,1)$ 到 $(4,2)$ 之间的一段弧。

解: 这里, 被积函数很简单, 曲线也简单, 可以用直接方法计算。用 y 作自变量会更简单一点, 不用计算根式函数的导数。

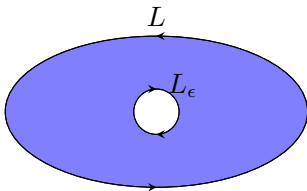
$$\begin{aligned}\int_L (x+y)dx + (y-x)dy &= \int_1^2 [(y^2+y) \cdot 2y + (y-y^2)]dy \\ &= \int_1^2 (2y^3 + y^2 + y)dy \\ &= \left. \frac{1}{2}y^4 + \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{2}y^2 \right|_1^2 \\ &= 8 + \frac{8}{3} + 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \\ &= \frac{34}{3}\end{aligned}$$

例 2: 计算 $\oint_L \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2}$, 其中 L 是 (1) 圆周 $(x-2)^2 + y^2 = 1$; (2) 原点在其内部的任一正向闭曲线。

解: (1) 曲线为圆心在点 $(2,0)$, 半径为 1 的圆周, 在其内部 D 上 $P(x,y), Q(x,y)$ 一阶连续可导。所以由格林公式

$$\begin{aligned}\oint_L \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2} &= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dydx \\ &= \iint_D \left(\frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \frac{\partial P}{\partial y} \right) dydx \\ &= \iint_D 0 dydx = 0\end{aligned}$$

(2) 因为被积函数在原点处没有定义, 所以原点是该函数的奇点。我们以原点为心, 作一个半径为 ϵ 的圆 L_ϵ , 那么被积函数在介于 L 与 L_ϵ 之间的区域内是一阶连续可导的。



这里 L 是正向, 逆时针, L_ϵ 是反向, 顺时针。介于这两条曲线之间的区域我们记为 D , 它的边界为 $L + L_\epsilon$, 由格林公式,

$$\oint_L \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2} + \oint_{L_\epsilon} \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

因为

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{x^2 + y^2}, \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2}{x^2 + y^2}$$

所以

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \Rightarrow \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = 0$$

所以我们得到

$$\oint_L \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2} = - \oint_{L_\epsilon} \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2}$$

因为 L_ϵ 可用参数方程表示为 $x = \epsilon \cos t, y = \epsilon \sin t$, 顺时针方向, 所以 t 是从 2π 到 0 ,

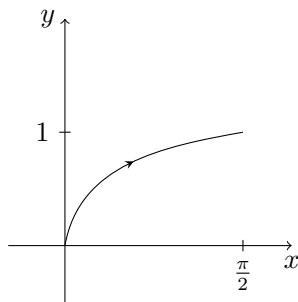
$$\begin{aligned} - \oint_{L_\epsilon} \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2} &= - \int_{2\pi}^0 \left(\frac{-\epsilon \sin t \epsilon (-\sin t) + \epsilon \cos t \epsilon \cos t}{\epsilon^2} \right) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{\epsilon^2 \sin^2 t + \epsilon^2 \cos^2 t}{\epsilon^2} dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi \end{aligned}$$

所以

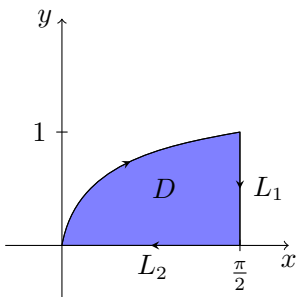
$$\oint_L \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2} = 2\pi$$

例 3: 计算 $\int_L (2xy^3 - y^2 \cos x)dx + (1 - 2y \sin x + 3x^2 y^2)dy$, 其中 L 是抛物线 $2x = \pi y^2$ 上从点 $(0, 0)$ 到 $(\frac{\pi}{2}, 1)$ 之间的一段。

解: 积分的曲线如图:



如果直接计算，这个积分基本上是求不出来的，如果利用格林公式，计算就变得很简单。但是这个曲线不是闭曲线，我们需要添加辅助线来将它变成闭曲线。



我们看到整个闭曲线的方向是顺时针方向，它是逆向的，所以

$$\left(\int_L + \int_{L_1} + \int_{L_2} \right) P(x, y)dx + Q(x, y)dy = - \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

我们先来计算右边的积分。因为

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}(1 - 2y \sin x + 3x^2 y^2) = -2y \cos x + 6xy^2, \\ \frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}(2xy^3 - y^2 \cos x) = 6xy^2 - 2y \cos x \end{aligned}$$

所以

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0, \quad \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = 0$$

那么

$$\int_L Pdx + Qdy = - \int_{L_1} Pdx + Qdy - \int_{L_2} Pdx + Qdy$$

在 L_1 上, $x = \frac{\pi}{2}, dx = 0$, y 从 1 到 0。所以

$$\begin{aligned}
 - \int_{L_1} Pdx + Qdy &= - \int_1^0 Q(x, y)dy \\
 &= - \int_1^0 \left(1 - 2y + 3 \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 y^2 \right) dy \\
 &= \int_0^1 \left(1 - 2y + 3 \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 y^2 \right) dy \\
 &= y - y^2 + \frac{\pi^2}{4} y^3 \Big|_0^1 = \frac{\pi^2}{4}
 \end{aligned}$$

在 L_2 上, $y = 0, dy = 0$, x 从 $\frac{\pi}{2}$ 到 0。所以

$$- \int_{L_2} Pdx + Qdy = - \int_{L_2} Pdx = - \int_{L_2} 0dx = 0$$

所以

$$\int_L (2xy^3 - y^2 \cos x)dx + (1 - 2y \sin x + 3x^2 y^2)dy = \frac{\pi^2}{4}$$

3 习题

最后是一些习题供同学们练习。

1, 设 (C) 是从 $((1,0))$ 到 $((0,1))$ 再到 $((-1,0))$ 的折线, 求下列曲线积分
 (1) $\int_C 2xydx + x^2dy$; (2) $\int_C ye^{xy}dx + xe^{xy}dy$; (3) $\int_C x^{2/3}dx + e^{7y}dy$.

2, 求曲线积分 $\int_C (x^2 + y)dx + xdy$, 其中 C 是曲线 $y = 9 - x^2$ 从 $(-3, 0)$ 到 $(3, 0)$ 的一段。

3, 求积分 $\int_C xydx + (e^y + x^2)dy$, 其中 (C) 是由 $y = x^2 + 4x + 4$ 与 $y = 4 - x^2$ 围成的区域的正向边界。

4, 计算积分 $\int_C \frac{-y}{x^2 + y^2}dx + \frac{x}{x^2 + y^2}dy$, 其中 C 为 (1) 任意一条原点在其内部的正向闭曲线; (2) 任意原点在其外部的正向闭曲线; (3) 曲线 $y = \frac{1}{4}x^2 + 1$ 从点 $(-2, 2)$ 到 $(2, 2)$ 之间的一段; (4) 曲线 $y = x^2 - 2$ 从点 $(-2, 2)$ 到 $(2, 2)$ 之间的一段。

5, 求积分 $\oint_C \frac{4x - y}{4x^2 + y^2}dx + \frac{x + y}{4x^2 + y^2}dy$, 其中 C 为 $x^2 + y^2 = 2$, 逆时针方向。

答案: 1 (1) 0 (2) 0 (3) $\frac{6}{5}$

$$2 \quad 18 \quad 3 \quad -\frac{8}{3}$$

$$4 \quad (1) \quad 2\pi \quad (2) \quad 0 \quad (3) \quad -\frac{\pi}{2} \quad (4) \quad \frac{3\pi}{2}$$

$$5 \quad \pi$$

如果有任何疑问，可以邮件或者微信提问。