条件分布

1. 离散型：(X,Y)的联合分布律 $P\{X=x_i, Y=y_j\}=p_{ij}$

$\Rightarrow$ X在$Y=y_j$下的条件分布律 $P\{X=x_i \mid Y=y_j\} = \dfrac{P\{X=x_i, Y=y_j\}}{P\{Y=y_j\}} = \dfrac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}$

Y在$X=x_i$下的条件分布律：$P\{Y=y_j \mid X=x_i\} = \dfrac{P\{X=x_i, Y=y_j\}}{P\{X=x_i\}} = \dfrac{p_{ij}}{p_{i\cdot}}$

例1. 设(X,Y)的分布律为，求① X在$Y=1$下的条件分布 ② Y在$X=0$下的条件分布

$Y \backslash X$	0	1	$P\{Y=y_j\}$
0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
$P\{X=x_i\}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	

解：

X	0	1
$P\{X=x_i \mid Y=1\}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

Y	0	1
$P\{Y=y_j \mid X=0\}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

或者 $P\{X=0 \mid Y=1\} = \dfrac{P\{X=0, Y=1\}}{P\{Y=1\}} = \dfrac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{3}$

$P\{X=1 \mid Y=1\} = \dfrac{P\{X=1, Y=1\}}{P\{Y=1\}} = \dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{2}{3}$

2. 连续型：设(X,Y)的联合密度为$f(x,y)$，对固定的某个y，$f_Y(y)>0$

$\Rightarrow$ X在$Y=y$下的条件密度 $f_{X|Y}(x|y) = \dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}$

$$f_{X|Y}(x|y)\,dx = \frac{f(x,y)\,dx\cdot dy}{f_Y(y)\cdot dy} = \frac{f(x,y)\,dy\,dx}{f_Y(y)\,dy} \approx \frac{F(x+dx,y+dy)-F(x,y)}{F_Y(y+dy)-F_Y(y)}$$

$\boxed{f(x+h) \approx f(x)+f'(x)\cdot h \qquad f'(x)\,dx \approx f(x+dx)-f(x).}$

$$= \frac{P\{x<X\le x+dx,\ y<Y\le y+dy\}}{P\{y<Y\le y+dy\}}$$

$= P\{x < X \le x+dx \mid y < Y \le y+dy\}$ $\quad dx, dy \to 0$

$\to P\{X = x \mid Y = y\}$

例2、设 (X, Y) 的联合密度为

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{12}{5}x(2-x-y), & 0<x<1,\ 0<y<1 \\ 0, & 其它 \end{cases}$$

求 X 在 $Y=y$ 下的条件概率密度，其中 $0<y<1$

解：$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx = \int_0^1 \frac{12}{5}x(2-x-y)\,dx \quad (0<y<1)$

$$= \frac{12}{5}\left(x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 y\right)\Big|_0^1 = \frac{12}{5}\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}y\right)$$

当 $0<x<1,\ 0<y<1$ 时，

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{\frac{12}{5}x(2-x-y)}{\frac{12}{5}\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}y\right)} = \frac{x(2-x-y)}{\frac{2}{3}-\frac{1}{2}y}$$

$$= \frac{6x(2-x-y)}{4-3y}$$

其它地方，$f_{X|Y}(x|y) = 0$

例如，当 $y=\frac{1}{2}$ 时，$f_{X|Y}(x|\frac{1}{2}) = \frac{6x(2-x-\frac{1}{2})}{4-\frac{3}{2}} = \frac{6x(\frac{3}{2}-x)}{\frac{5}{2}}$

$$= \frac{6x(3-2x)}{5}$$