

幂级数的性质

1. 考虑幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 或 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$

2. 定理: 若级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 在 $z=\underline{z_1}$ 处收敛, 则级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 在圆 $|z| < |z_1|$ 内绝对收敛.

证明: 若 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_1^n$ 收敛

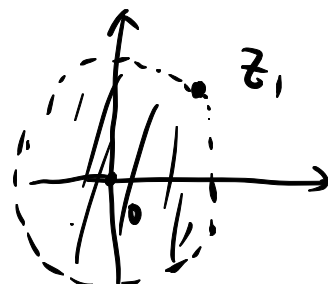
$$\Rightarrow |a_n z_1^n| \leq M$$

$$\text{若 } \forall |z| < |z_1|, \quad \left| \frac{z}{z_1} \right| = \rho < 1$$

$$\Rightarrow |a_n z^n| = |a_n z_1^n| \left| \frac{z}{z_1} \right|^n \leq M \rho^n$$

$$\Rightarrow \because \sum M \rho^n \text{ 收敛} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n| \text{ 收敛}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ 绝对收敛.}$$



2. 定理: 若 $\sum a_n (z-z_0)^n$ 在 z_1 处收敛, 则在圆内, $\sum a_n (z-z_0)^n$ 绝对收敛.

$$|z-z_0| < |z_1-z_0|$$

3. 推论: 若 $\sum a_n z^n$ 在 $z=\underline{z_1}$ 处发散, 则级数在 $|z| > |z_1|$ 处发散
($\sum a_n (z-z_0)^n$) ($|z-z_0| > |z_1-z_0|$)

4. 收敛半径: 存在数 R , 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 在 $\begin{cases} |z| < R & \text{收敛} \\ |z| > R & \text{发散} \end{cases}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \begin{cases} |z-z_0| < R & \text{收敛} \\ |z-z_0| > R & \text{发散} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ 称 R 为级数的收敛半径.

5. 收敛半径的求法:

$$\textcircled{1} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = l \Rightarrow \begin{cases} 0 < l < 1 \\ l > 1 \\ l = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} &\Rightarrow \sum a_n \text{ 收敛.} \\ &\Rightarrow \sum a_n \text{ 发散} \\ &\Rightarrow \text{不知道.} \end{aligned}$$

$$\textcircled{2} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = l \quad \begin{cases} 0 < l < 1 \\ l > 1 \\ l = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} &\Rightarrow \sum a_n \text{ 收敛} \\ &\Rightarrow \sum a_n \text{ 发散} \\ &\Rightarrow \text{不知道} \end{aligned}$$

收敛半径: (a) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$ 收敛圆: $|z| < R$
 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ 收敛圆: $|z - z_0| < R$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| |z| < 1 \quad \text{收敛.}$$

$$\Rightarrow |z| < \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

(b) $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n z^n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} |z| \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \quad \text{收敛}$$

$$\Rightarrow |z| < \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

例1. 求级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ 的收敛半径与收敛圆

$$\text{解: } R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} / \frac{1}{(n+1)^2} = 1$$

$$\Rightarrow R = 1$$

$$\Rightarrow \text{收敛圆 } |z| < 1$$

例2. 求 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ 的收敛半径.

$$\text{解: } R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = \infty$$