

特征值与特征向量的性质 $A_{n \times n}$

1. $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$, λ 特征值, $\vec{x}$ 相应于 λ 的特征向量.

2. 定理1. 若 $\vec{x}_1$ 和 $\vec{x}_2$ 都是对应于 λ 的特征向量, 则 $k_1\vec{x}_1 + k_2\vec{x}_2$ 也是 A 关于 λ 的特征向量 ($k_1\vec{x}_1 + k_2\vec{x}_2 \neq 0$)

$$\text{证: } A(k_1\vec{x}_1 + k_2\vec{x}_2) = k_1A\vec{x}_1 + k_2A\vec{x}_2 = k_1\lambda\vec{x}_1 + k_2\lambda\vec{x}_2 \\ = \lambda(k_1\vec{x}_1 + k_2\vec{x}_2)$$

3. 定理2. 若 λ 是 A 的特征值, $\vec{x}$ 是对应的特征向量, 则

① $k\lambda$ 是 kA 的特征值, $\vec{x}$ 是对应的特征向量.

② λ^n 是 A^n 的特征值, — — — — —

③ 若 A 可逆, 则 λ^{-1} 是 A^{-1} 的特征值.

④ $\lambda + k$ 是 $A + kI$ 的特征值.

证明: $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$

① $\Rightarrow kA\vec{x} = k\lambda\vec{x}$

② $\Rightarrow A\vec{x} = \lambda\vec{x} \Rightarrow AA\vec{x} = A\lambda\vec{x} \Rightarrow A^2\vec{x} = \lambda A\vec{x} \\ \Rightarrow A^2\vec{x} = \lambda^2\vec{x} \Rightarrow \lambda^2 \text{ 是 } A^2 \text{ 的特征值}$

由归纳法, 可知 λ^n 是 A^n 的特征值.

④ $\Rightarrow A\vec{x} + kI\vec{x} = \lambda\vec{x} + k\vec{x} \Rightarrow (A + kI)\vec{x} = (\lambda + k)\vec{x}$

③ $\Rightarrow A\vec{x} = \lambda\vec{x} \Rightarrow A^{-1}A\vec{x} = A^{-1}\lambda\vec{x} \\ \Rightarrow \vec{x} = \lambda A^{-1}\vec{x} \Rightarrow A^{-1}\vec{x} = \lambda^{-1}\vec{x}$

$\Rightarrow \lambda^{-1}$ 是 A^{-1} 的特征值.

4. 定理3. A 与 A^T 具有相同的特征多项式与特征值.

$$(A^T - \lambda I) = (A - \lambda I)^T$$

$$\Rightarrow |A^T - \lambda I| = |(A - \lambda I)^T| = |A - \lambda I|$$

5. 定理: ① $|A| = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_n = \prod_{i=1}^n \lambda_i$ (拆 n 重算 n 次)

② $\sum_{i=1}^n a_{ii} = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = \sum_{i=1}^n \lambda_i$

证明: $|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = (-1)^n |\lambda I - A|$

$$= (-1)^n \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^n (\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0) \\ = (-1)^n p(\lambda)$$

特征多项式 $p(\lambda)$ 中有一项 $(\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22}) \cdots (\lambda - a_{nn})$, 其系数项最多只有 λ 的 $n-2$ 阶项. $n-1$ 阶的项是 $(-a_{11} - a_{22} - a_{33} - \cdots - a_{nn})\lambda^{n-1} = -\sum_{i=1}^n a_{ii}\lambda^{n-1}$

$$\Rightarrow a_{n-1} = -\sum_{i=1}^n a_{ii}$$

设 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ 为 n 个特征值, $\Rightarrow p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_n)$

$$\Rightarrow p(0) = (-1)^n \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_n = a_0$$

$$\textcircled{1} \Rightarrow |A| = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_n \quad (|A - \lambda I| = (-1)^n p(\lambda))$$

$$\textcircled{2} \quad a_{n-1} = -\sum_{i=1}^n a_{ii}$$

根与系数的关系 $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n} = -a_{n-1} = \sum_{i=1}^n a_{ii}$

6. 定理: A 的对应于不同的特征值的特征向量是线性无关的.

证明: (归纳法来证明), $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m$ 是对应于 $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ 的特征向量

$m=1$, $\Rightarrow \vec{x}_1$ 线性无关

假设对 $m=k$, 结论成立 ($\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k$ 线性无关)

$$m=k+1, \text{ 若设 } a_1\vec{x}_1 + a_2\vec{x}_2 + \cdots + a_k\vec{x}_k + a_{k+1}\vec{x}_{k+1} = 0 \quad \textcircled{1}$$

$$\Rightarrow A(a_1\vec{x}_1 + a_2\vec{x}_2 + \cdots + a_k\vec{x}_k + a_{k+1}\vec{x}_{k+1}) = 0$$

$$\Rightarrow a_1\lambda_1\vec{x}_1 + a_2\lambda_2\vec{x}_2 + \cdots + a_k\lambda_k\vec{x}_k + a_{k+1}\lambda_{k+1}\vec{x}_{k+1} = 0 \quad \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} - \textcircled{1} \times \lambda_{k+1} \Rightarrow a_1(\lambda_1 - \lambda_{k+1})\vec{x}_1 + a_2(\lambda_2 - \lambda_{k+1})\vec{x}_2 + \cdots + a_k(\lambda_k - \lambda_{k+1})\vec{x}_k = 0$$

由假设: $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k$ 线性无关, $\lambda_1, \dots, \lambda_k, \lambda_{k+1}$ 是不同的特征值

$$\Rightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_k = 0 \quad \text{代入 0 式} \Rightarrow a_{k+1} = 0$$

$$\Rightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_k = a_{k+1} = 0 \quad \Rightarrow \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k, \vec{x}_{k+1} \text{ 线性无关}$$

由归纳法. 定理得证.