

极值存在的第二条件

1. 费马引理: 若 $f(x)$ 在 x_0 处可微且 $f(x_0)$ 是极值 $\Rightarrow f'(x_0) = 0$

2. 极值存在的第一条件: ① $\begin{cases} x < x_0 \text{ 时, } f'(x) > 0 \\ x > x_0 \text{ 时, } f'(x) < 0 \end{cases} \Rightarrow f(x_0) \text{ 极大值}$

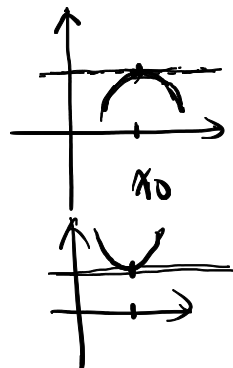
② $\begin{cases} x < x_0 \text{ 时, } f'(x) < 0 \\ x > x_0 \text{ 时, } f'(x) > 0 \end{cases} \Rightarrow f(x_0) \text{ 极小值}$

3. 定理: (极值存在的第二充分条件). $f(x)$ 在 x_0 处二阶可导且 $f'(x_0) = 0$

① $f''(x_0) < 0 \Rightarrow f(x_0) \text{ 极大值}$

② $f''(x_0) > 0 \Rightarrow f(x_0) \text{ 极小值}$

③ $f''(x_0) = 0$
无法判断



④ $f'(x_0) = 0, f''(x_0) < 0 \Rightarrow$ 切线斜率为 0 (水平线)
曲线是凸的

例 1. 求函数 $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5$ 的极值.

解: $f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x = 12x(x^2 - x - 2) = 12x(x-2)(x+1)$
 $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0, -1, 2$

$f''(x) = 36x^2 - 24x - 24 = 12(3x^2 - 2x - 2)$

$f''(0) = -24 < 0 \Rightarrow f(0) = 5 \text{ 极大值}$

$f''(-1) = 12(3+2-2) = 36 > 0 \Rightarrow f(-1) = 0 \text{ 极小值}$

$f''(2) = 12(3 \cdot 4 - 2 \cdot 2 - 2) > 0 \Rightarrow f(2) = 3 \cdot 16 - 4 \cdot 8 - 12 \cdot 4 + 5 = -27 \text{ 极小值}$

例 2. 求 $f(x) = (x^2 - 1)^3 + 1$ 的极值.

解: $f'(x) = 3(x^2 - 1)^2 \cdot 2x = 6x(x^2 - 1)^2, f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0, \pm 1$

$f''(x) = 6(x^2 - 1)^2 + 6x \cdot 2(x^2 - 1) \cdot 2x = 6(x^2 - 1)^2 + 24x^2(x^2 - 1)$
 $= 6(x^2 - 1)(x^2 - 1 + 4x^2) = 6(x^2 - 1)(5x^2 - 1)$

$f''(0) = 6 > 0 \Rightarrow f(0) = 0 \text{ 极小值}$

$f''(1) = 0 \text{ 无法判断} \quad f''(-1) = 0 \text{ 无法判断}$

用一阶导数判断.

$f(-1)$ 不是极值

$f(1)$ 也不是极值.

