笔记下载：www.sudoedu.com/cn

常系数齐次线性微分方程

1、二阶常系数齐次线性微分方程：$y''+py'+qy=0$，p、q都是常数

设 $y=e^{rx} \Rightarrow r^2e^{rx}+pre^{rx}+qe^{rx}=0$

$\Rightarrow e^{rx}(r^2+pr+q)=0 \Rightarrow r^2+pr+q=0$ （特征方程）

2. 特征方程 $r^2+pr+q=0$

① $r_1\neq r_2$ 实根 $p^2-4q>0 \Rightarrow y_1=e^{r_1x}$，$y_2=e^{r_2x}$ 线性无关

② $r_1=r_2$ 重根 $p^2-4q=0 \Rightarrow y_1=e^{rx}$

③ $r_{1,2}=\alpha\pm i\beta$ 复根 $p^2-4q<0 \Rightarrow y_1=e^{(\alpha+i\beta)x}$，$y_2=e^{(\alpha-i\beta)x}$

3. ① $r_1\neq r_2$ 实根 $\Rightarrow$ 通解：$y=c_1e^{r_1x}+c_2e^{r_2x}$

② $r_1=r_2 \Rightarrow y_1=e^{rx}$，$y_2=?$

$\because$ y_1,y_2 线性无关，$\frac{y_2}{y_1}=u(x)$ （不是常数）$\Rightarrow y_2=u(x)y_1$

$\Rightarrow y_2'=u'y_1+uy_1'$，$y_2''=u''y_1+2u'y_1'+uy_1''$

$\Rightarrow y_2''+py_2'+qy_2=0$

$\Rightarrow u''y_1+2u'y_1'+uy_1''+p(u'y_1+uy_1')+quy_1=0$

$\Rightarrow u''y_1+u'(2y_1'+py_1)+u(\underbrace{y_1''+py_1'+qy_1}_{=0})=0$

$\Rightarrow u''y_1+u'(2re^{rx}+pe^{rx})=0$

$\Rightarrow u''y_1+u'e^{rx}(\underbrace{2r+p}_{=0})=0$

$\left[r=\frac{-p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2}=-\frac{p}{2} \Rightarrow 2r+p=0 \right]$

$\Rightarrow u''y_1=0$

$\Rightarrow u''=0 \Rightarrow u=C_1x+C_2$ 取 $u=x$

$\Rightarrow y_2=xe^{rx}$

$\Rightarrow y=(C_1+C_2x)e^{rx}$

③ $r_{1,2}=\alpha\pm i\beta$ $y_1=e^{(\alpha+i\beta)x}=e^{\alpha x}\cdot e^{i\beta x}$，$y_2=e^{(\alpha-i\beta)x}=e^{\alpha x}\cdot e^{-i\beta x}$

$\Rightarrow$ 欧拉公式：$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

$e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$

$\Rightarrow \quad y_1 = e^{\alpha x}(\cos(\beta x) + i\sin(\beta x))$, $y_2 = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin(\beta x))$

$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}(y_1 + y_2) = e^{\alpha x}\cos\beta x = \overline{y_1}$ 仍然是微分方程的解，且

$\frac{1}{2i}(y_1 - y_2) = e^{\alpha x}\sin\beta x = \overline{y_2}$ 线性无关

$\Rightarrow$ 通解：$y = e^{\alpha x}(c_1\cos\beta x + c_2\sin\beta x) = c_1\overline{y_1} + c_2\overline{y_2}$

4. 总结：特征方程：$r^2 + pr + q = 0$

① $r_1 \neq r_2$ 实根：$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$

② $r_1 = r_2$ 重根：$y = (c_1 + c_2 x)e^{rx}$

③ $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ 复根：$y = e^{\alpha x}(c_1\cos\beta x + c_2\sin\beta x)$

例1. 求微分 $y'' - y' - 2y = 0$ 的通解。

解：特征方程：$r^2 - r - 2 = 0 \Rightarrow (r-2)(r+1) = 0 \Rightarrow r_1 = 2,\ r_2 = -1$

$\Rightarrow$ 通解：$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x}$

例2、求微分方程：$y'' + 4y' + 4 = 0$ 的通解。

解：特征方程 $r^2 + 4r + 4 = 0 \Rightarrow (r+2)^2 = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = -2$

$\Rightarrow$ 通解：$y = (c_1 + c_2 x)e^{-2x}$

例3. 求微分方程 $y'' + 4y' + 29y = 0$ 在 $y(0) = 0$，$y'(0) = 15$ 条件下的解。

解：特征方程：$r^2 + 4r + 29 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{16 - 4\cdot 29}}{2}$

$= -2 \pm 10i$

$\Rightarrow$ 通解：$y = e^{-2x}(c_1\cos(10x) + c_2\sin(10x))$

$y(0)=0 \Rightarrow 0 = 1\cdot(c_1) \Rightarrow c_1 = 0$

$y' = \left[C_2 e^{-2x}\sin(10x)\right]' = \underline{C_2(-2)e^{-2x}\sin(10x)} + C_2 e^{-2x}\cdot 10\cos(10x)$

$y'(0) = C_2\cdot 10 = 15 \Rightarrow C_2 = \frac{3}{2}$

$\Rightarrow$ 初值问题的解为 $y = \frac{3}{2}e^{-2x}\sin(10x)$

5. n阶常系数齐次微分方程: $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0$

$\Rightarrow$ 特征方程: $r^n + a_{n-1}r^{n-1} + \cdots + a_1 r + a_0 = 0$

① 实单根 $r \Rightarrow$ 有一项 Ce^{rx}

② k重根 $r \Rightarrow$ 有k项 $(C_1 + C_2 x + \cdots + C_k x^{k-1})e^{rx}$

③ 一对复根 $\alpha \pm i\beta \Rightarrow$ 有2项: $e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x)$

④ k重复根 $\alpha \pm i\beta \Rightarrow$ 有$2k$项. $e^{\alpha x}[(C_1 + C_2 x + \cdots + C_k x^{k-1})\cos\beta x$
$+ (d_1 + d_2 x + \cdots + d_k x^{k-1})\sin\beta x]$