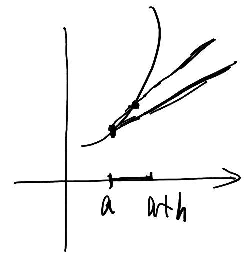
导数的定义，曲线切线的方程



1. $f'(a)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$

$\quad =\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$

2. $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ （可导，可微）

3. Thm: $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导 $\Rightarrow$ $f(x)$ 在 $x=a$ 处连续。

4. 切线: $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$ （x_0处切线）

$\quad y-f(a)=f'(a)(x-a)$ （$x=a$ 处切线）

} 点斜式方程

例1. 设 $\phi(x)$ 在 $x=a$ 处连续，$f(x)=(x-a)\phi(x)$，求 $f'(a)$

$f'(x)=(x-a)'\phi(x)+(x-a)\phi'(x)$?

$\quad =\phi(x)+(x-a)\phi'(x)$

$f'(a)=\phi(a)$

×

解: $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\cancel{(x-a)}\phi(x)-0}{\cancel{x-a}}=\phi(a)$

例2. 求曲线 $y=x^4-3$ 在点 $(1,-2)$ 处的切线和法线方程

$\left(\begin{array}{l} m_1m_2=-1 \\ m_2=-\dfrac{1}{m_1}\end{array}\right)$

解: $y'=4x^3$ $\qquad y'(1)=4$

$\Rightarrow$ 切线方程: $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$ $\Rightarrow$ $y+2=4(x-1)$

$\Rightarrow y=4x-6$

法线方程: $y-y_0=-\dfrac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$ $\Rightarrow$ $y+2=-\dfrac{1}{4}(x-1)$

$\Rightarrow y=-\dfrac{1}{4}x-\dfrac{7}{4}$