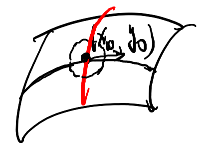
多元函数的极值

1、极值：在 (x_0,y_0) 的某个邻域内，(x,y) 在此邻域内

$f(x,y) \le f(x_0,y_0) \Rightarrow f(x_0,y_0)$ 极大值

$f(x,y) \ge f(x_0,y_0) \Rightarrow f(x_0,y_0)$ 极小值



2、定理1：$f(x_0,y_0)$ 是 $f(x,y)$ 的极值，f_x, f_y 在 (x_0,y_0) 处连续

$\Rightarrow f_x(x_0,y_0)=0$，$f_y(x_0,y_0)=0$

3、定理2（充分条件）$f_x(x_0,y_0)=0$，$f_y(x_0,y_0)=0$，$f(x,y)$ 二阶偏导数连续

① $f_{xx}\cdot f_{yy}-f_{xy}^2>0$，$f_{xx}<0 \Rightarrow f(x_0,y_0)$ 极大值

② $f_{xx}\cdot f_{yy}-f_{xy}^2>0$，$f_{xx}>0 \Rightarrow f(x_0,y_0)$ 极小值

③ $f_{xx}\cdot f_{yy}-f_{xy}^2<0 \Rightarrow f(x_0,y_0)$ 不是极值（$f(x_0,y_0)$ 鞍点）

④ $f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2=0 \Rightarrow$ 不知道是不是极值。

$f_{xx}=A$，$f_{xy}=B$，$f_{yy}=C$，$AC-B^2>0 \Rightarrow$ 是极值

例1、求 $f(x,y)=x^4+y^4-4xy+1$ 的极值

解：$\left.\begin{aligned} f_x &= 4x^3-4y = 0 \\ f_y &= 4y^3-4x = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} x^3&=y \\ y^3&=x \end{aligned} \Rightarrow x^9-x=0 \Rightarrow x(x^8-1)=0$

$\Rightarrow x(x^4-1)(x^4+1)=0$

$\Rightarrow x(x^2-1)(x^2+1)(x^4+1)=0$

$\Rightarrow x(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)=0$

$\Rightarrow x=-1,0,1$，$y=-1,0,1$

临界点：$(-1,-1)$，$(0,0)$，$(1,1)$

$f_{xx}=12x^2$，$f_{xy}=-4$，$f_{yy}=12y^2$

① 在 $(-1,-1)$ 点，$f_{xx}\cdot f_{yy}-f_{xy}^2=12\cdot 12-16=128>0$，$f_{xx}(-1,-1)=12>0$

$\Rightarrow f(-1,-1)=-1$ 为极小值

② 在 $(0,0)$ 点，$f_{xx}\cdot f_{yy}-f_{xy}^2=0-16<0$，$f(0,0)$ 不是极值，（它是鞍点）

③ 在 $(1,1)$ 点，$f_{xx}\cdot f_{yy}-f_{xy}^2=12\cdot 12-16=128>0$，$f_{xx}(1,1)=12>0$

$\Rightarrow f(1,1)=-1$ 为极小值。

例2、$f(x,y) = e^{4y-x^2-y^2}$，求 $f(x,y)$ 的极值

解，$f_x = -2x e^{4y-x^2-y^2} = 0 \Rightarrow x = 0$　　　临界点 $(0,2)$

$f_y = (4-2y) e^{4y-x^2-y^2} = 0 \Rightarrow y = 2$

$f_{xx} = -2 e^{4y-x^2-y^2} - 2x(-2x) e^{4y-x^2-y^2} = e^{4y-x^2-y^2}(4x^2-2)$

$f_{xy} = -2x(4-2y) e^{4y-x^2-y^2}$

$f_{yy} = -2 e^{4y-x^2-y^2} + \underline{(4-2y)}^2 e^{4y-x^2-y^2}$

在 $(0,2)$，$f_{xx} = -2 e^{8-4} = -2e^4 < 0$

$f_{xy} = 0$

$f_{yy} = -2e^4 < 0$

$\Rightarrow f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2 = 4e^8 > 0 \Rightarrow f(0,2) = e^4$ 为极大值