参数方程的导数

1. 参数方程的导数

$$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$$ ，① $\varphi(t)$, $\psi(t)$ 都是可微函数

② $\varphi'(t)\neq 0$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

证明：$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y/\Delta t}{\Delta x/\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y/\Delta t}{\Delta x/\Delta t}=\frac{y'(t)}{x'(t)}$$

例1. 求参数 $x=t-t^2$, $y=t-t^3$ 的导数 $\frac{dy}{dx}$

解：$$\frac{dy}{dx}=\frac{y'(t)}{x(t)}=\frac{1-3t^2}{1-2t}$$

例2. 求由参数方程给出的曲线 $x=\sec t$, $y=\tan t$ $-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$
在点 $(\sqrt{2},1)$ 处的切线方程.

解：$$\frac{dy}{dx}=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{\sec^2 t}{\sec t\cdot\tan t}=\frac{\sec t}{\tan t}=\frac{1}{\cos t}\cdot\frac{\cos t}{\sin t}=\csc t$$

$x=\sqrt{2}$, $y=1$ $\Rightarrow$ $t=\frac{\pi}{4}$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(\sqrt{2},1)}=\csc\frac{\pi}{4}=\sqrt{2}$$

$\Rightarrow$ 切线方程：$y-1=\sqrt{2}(x-\sqrt{2})$

$y=\sqrt{2}x-1$